Barbel Inhelder
Jean Piaget

DE LA LÓGICA DEL NIÑO A LA LÓGICA DEL ADOLESCENTE

Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales

PAIDÓS
Barcelona
Buenos Aires
México

Título original: *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*
Publicado en francés por Presses Universitaires de France, París

Traducción de María Teresa Cevasco

1.ª edición, 1985
2.ª reimpresión, 1996

© 1955, Presses Universitaires de France
© de todas las ediciones en castellano,
Ediciones Paidós Ibérica, S.A.,
Mariano Cubí, 92 - 08021 Barcelona
y Editorial Paidós, SAICF,
Defensa, 599 - Buenos Aires

ISBN: 84-7509-176-8
Depósito legal: B-23/1996

Impreso en Hurope, S. L.,
Recaredo, 2 - 08005 Barcelona

Impreso en España - Printed in Spain

INDICE

Págs.

PREFACIO 9

PRIMERA PARTE

LA CONSTITUCION DE LA LOGICA DE LAS PROPOSICIONES

Capítulo

I. La igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión y las operaciones de implicación recíproca 15
1. El estadio I (16). 2. El estadio II (niveles II A y II B) (17). 3. El estadio formal (niveles III A y III B) (20). 4. Conclusión: Pasaje de la correspondencia (concreta) a la implicación recíproca (formal) (24).

II. La flotación de los cuerpos y la eliminación de las contradicciones 28
1. Estadio I (29). 2. Subestadio II A (34). 3. Nivel II B (37). 4. Estadio III (40).

III. La flexibilidad y las operaciones que intervienen en la disociación de los factores 49
1. Estadio I (50). 2. Estadio II A (51). 3. Subestadio II B (53). 4. Nivel III A (57). 5. Nivel III B (60). 6. Las igualdades por compensación de factores (62).

IV. Las oscilaciones del péndulo y las operaciones de exclusión 66
1. Estadio I: Indiferenciación entre las acciones del sujeto y los movimientos del péndulo (66). 2. Estadio II: Seriaciones y correspondencias pero sin disociación de los factores (67). 3. Subestadio III A: Disociación posible pero no espontánea (69). 4. Subestadio III B: La disociación de los factores y la exclusión de las relaciones inoperantes (71).

V. La caída de los cuerpos sobre un plano inclinado y las operaciones de disyunción 76
1. Estadio I: Intuición global sin lectura operatoria de la experiencia (76). 2. Estadio II: Ensayos de correspondencias operatorias y exclusión ordinaria del peso (78). 3. Estadio III: Compensaciones necesarias entre la inclinación y la distancia (III A), luego descubrimiento de la altura como factor único (III B) (81).

Págs.

VI. Papel de la imantación invisible y las dieciséis operaciones proposicionales binarias 86

1. Estadio I: Disyunciones y exclusiones preoperatorias (86). 2. Subestadio II A: Comienzo de las disyunciones y exclusiones concretas (88). 3. Subestadio II B: La exclusión concreta del peso (91). 4. Estadio III: Disyunciones y exclusiones proposicionales (92).

SEGUNDA PARTE

LOS ESQUEMAS OPERATORIOS DE LA LOGICA FORMAL

VII. Combinaciones de cuerpos químicos incoloros o coloreados 97

1. Estadio I: Asociaciones empíricas y explicaciones precausales (98). 2. Subestadio II A: Multiplicación de los factores por "G" (99). 3. Subestadio II B: Operaciones multiplicativas con comienzos empíricos de combinaciones *n* a *n* (102). 4. Subestadio III A: Formación de las combinaciones sistemáticas *n* a *n* (104). 5. Subestadio III B: Equilibración del sistema (107).

VIII. La conservación del movimiento sobre un plano horizontal 109

1. Estadio I: Ausencia de las operaciones necesarias para una lectura objetiva de la experiencia y explicaciones contradictorias (110). 2. Subestadio II A: Intentos de eliminación de las contradicciones y corrección después de experimentar (111). 3. Subestadio II B: Comienzo de inversión del problema en la dirección de las causas de la disminución de velocidad (112). 4. Subestadio III A: Inversión explícita del problema del movimiento durante la experiencia (112). 5. Subestadio III B: Conservación del movimiento (114).

IX. Los vasos comunicantes 117

1. Estadio I: Indiferenciación entre las acciones del sujeto y las transformaciones del objeto y ausencia de reciprocidad (119). 2. Subestadio II A: Traducción de las acciones en operaciones objetivas y descubrimiento de las relaciones de altura (120). 3. Subestadio II B: Igualdad final de los niveles del líquido pero ausencia de explicación (121). 4. Subestadio III A: Comienzos de explicación y estructuración formal (123). 5. Subestadio III B: Generalización formal de los conocimientos adquiridos (126). 6. La noción de equilibrio y el grupo de las 4 transformaciones interproposicionales *INRC* (126).

X. El equilibrio de la prensa hidráulica 130

1. Estadio I: Incomprensión del papel del peso (Subestadio I A), luego comprensión global sin seriaciones ni correspondencias operatorias (131). 2. Subestadio II A: Seriación exacta de los pesos y correspondencia correcta con los niveles (133). 3. Subestadio II B: Inicios intuitivos de la noción de resistencia (135). 4. Estadio III: La reciprocidad de la acción y de la reacción (136). 5. Conclusión: Los razonamientos del Estadio III y el esquema operatorio formal del equilibrio (139).

Págs.

XI. El equilibrio de la balanza 142

1. Estadio I: Indiferenciación entre la acción propia y el proceso exterior (I A); luego articulación de las intuiciones en la dirección de la compensación de los pesos (I B) (142). 2. Subestadio II A: Operaciones concretas sobre los pesos o las distancias pero sin coordinación sistemática entre ellos (145). 3. Subestadio II B: Correspondencia inversa de los pesos y las distancias (147). 4. Estadio III: Descubrimiento y explicación de la ley (149). 5. El esquema de las proporciones y el grupo *INRC* (152).

XII. La tracción de un peso sobre un plano inclinado 156

1. Estadio I: Indiferenciación entre la propia acción y los procesos objetivos (156). 2. Subestadio II A: Determinación del papel de los pesos sin coordinación operatoria con las inclinaciones (157). 3. Subestadio II B: Descubrimiento del papel general de la inclinación y comienzos de la noción de trabajo (158). 4. Subestadio III A: Coordinación cualitativa de los tres factores pero sin la proporción en función de las alturas (162). 5. Subestadio III B: Descubrimiento de la ley (165).

XIII. La proyección de sombras 169

1. Estadio II: Descubrimiento del papel de los tamaños (II A) luego de las distancias (II B) (170). 2. Estadio III: Proporcionalidad de la correspondencia (III A); luego generalización y explicación de la ley (III B) (172).

XIV. Fuerza centrífuga y compensaciones 178

1. Estadio I: Interpretaciones preoperatorias (179). 2. Subestadio II A: Correspondencias parciales (179). 3. Subestadio II B: Comienzos de la compensación concreta (181). 4. Estadio III: Disociación espontánea de los factores y compensación por proporcionalidad (183). 5. Proporciones y compensación (185).

XV. Las dispersiones probables y las correlaciones 190

I. Las dispersiones probables 190

1. Estadio I: Ni conservación ni ley de dispersión (191). 2. Estadio II: Reacciones probabilísticas difusas (II A); luego determinación de una zona de dispersión (II B) (192). 3. Estadio III: Explicación de la dispersión y determinación de la ley con fluctuaciones fortuitas (194).

II. Las correlaciones 197

4. Nivel III A: La interpretación probabilística de las frecuencias consideradas de modo aislado pero sin establecimiento de relación entre los casos $(a + d)$ y los casos $(b + c)$ (199). 5. Subestadio III B: Relación espontánea entre los casos favorables $(a + d)$ y los casos desfavorables $(b + c)$ y con el conjunto de los casos posibles (203).

TERCERA PARTE

LAS ESTRUCTURAS DE CONJUNTO DEL PENSAMIENTO FORMAL

Págs.

XVI. El pensamiento formal desde el punto de vista del equilibrio 209

1. El pensamiento preoperatorio (o intuitivo). El pensamiento operatorio concreto y el pensamiento formal (209). 2. Lo real y lo posible en el pensamiento formal (217). 3. El problema de las estructuras (226).

XVII. Las estructuras concretas y las estructuras formales 231

1. Las agrupaciones del pensamiento concreto (231). 2. Pasaje de las operaciones concretas de clases y relaciones a las operaciones interproposicionales (236). 3. El sistema de las 16 operaciones binarias (247). 4. La puesta en funcionamiento del sistema de las 16 operaciones binarias y la naturaleza del razonamiento formal (255). 5. Los esquemas operatorios con estructura formal (259). 6. La estructura de conjunto de las operaciones formales en tanto forma de equilibrio final de las operaciones mentales (277).

XVIII. El pensamiento del adolescente 281

PREFACIO

El doble título de esta obra no corresponde simplemente a una nueva forma de colaboración entre sus autores o a un deseo de distinguir sus respectivos aportes a la obra común: se debe a la dualidad de los problemas formulados que, por otra parte, no afectó en absoluto la unidad final de las conclusiones.

Existe una breve historia que creemos útil referir aquí, pues proporciona un buen ejemplo de la convergencia, hoy posible, en el dominio del análisis operatorio (*operatoire*) de la inteligencia, entre el método experimental y el método deductivo cuando éste se funda en un algoritmo preciso.

Mientras uno de los autores se hallaba momentáneamente apartado de sus tareas experimentales por la redacción de una *Epistemología genética*, un *Tratado de lógica* y un *Ensayo acerca de las transformaciones de las operaciones lógicas* —estas dos últimas obras destinadas a proporcionar una representación simbólica posible de los procesos reales del pensamiento—, el otro abordaba con sus asistentes un estudio sistemático acerca de la inducción de las leyes físicas en el niño y en el adolescente.

Ahora bien, este estudio genético de la inducción experimental desembocó en dos resultados inesperados.

En primer lugar, se halló que el estadio de desarrollo que se inicia cerca de los 11-12 años, que siempre encontramos en nuestros estudios anteriores, no sólo constituía un nivel de culminación respecto del estadio de 7 a 11 años (estadio de elaboración de las operaciones concretas del pensamiento del niño), sino que representaba además un período de formación que culminaba en una meseta (*palier*) de equilibrio alrededor de los 14-15 años. Por consiguiente resultaba posible caracterizar el pensamiento del adolescente por la constitución de ciertos métodos de inducción experimental y, sobre todo, de verificación sistemática desconocidas para el niño.

En segundo lugar, estos métodos de descubrimiento y prueba experimentales propios del adolescente en contraste con el niño, se mostraron solidarios con toda una nueva estructuración operatoria, fundada sobre la lógica de las proposiciones y sobre un pensamiento "formal" distinto del pensamiento operatorio "concreto" de los 7 a 11 años (pues este último sólo requiere ciertas operaciones de la lógica de las clases y las relaciones).

En este punto intervino el segundo autor por las razones que señalamos a continuación y que ilustran de modo adecuado la convergencia de la que hablábamos más atrás entre los resultados de la experiencia y los de la deducción. En efecto, se descubrió que para analizar estas estructuras operatorias de conjunto propias del pensamiento formal del adolescente, era necesario emplear, no sólo los algoritmos de la lógica de las proposiciones, por todos conocidos, sino además el grupo de cuatro transformaciones (inversiones y reciprocidades) que uno de nosotros había descripto como necesario para el funcionamiento de los mecanismos del pensamiento formal.[1] Porque el gran interés de los datos recopilados gracias al estudio del razonamiento experimental en el adolescente reside en que ponen de manifiesto que el pensamiento formal no sólo consiste en razonamientos verbales (lógica de las proposiciones), sino que implica la formación de una serie de esquemas operatorios que aparecen sincrónicamente: operaciones combinatorias, proporciones, dobles sistemas de referencia, esquema del equilibrio mecánico (igualdad de la acción y reacción), probabilidades multiplicativas, correlaciones, etcétera. Ahora bien, para explicar la formación simultánea de estos esquemas operatorios y de la lógica de las proposiciones, es indispensable recurrir no sólo a las operaciones particulares de la lógica de las proposiciones, sino también, y sobre todo, a las "estructuras" de conjunto que los fundan, esto es, precisamente a la doble estructura del reticulado y del grupo de cuatro transformaciones (grupo de Klein o *Vierergruppe*, que uno de nosotros ha analizado a propósito de las transformaciones de las operaciones proposicionales.

En resumen, mientras uno de los dos autores de esta obra estudiaba el pasaje de la lógica del niño a la del adolescente, principalmente desde el punto de vista del razonamiento experimental, el otro elaboraba los instrumentos de análisis logístico que permitirían la interpretación de los resultados así obtenidos. Sólo *a posteriori* —se nos crea o se dude del valor de esta declaración—, esto es, en el momento de las comparaciones de conjunto y de las interpretaciones finales, los autores del presente estudio se percataron de la convergencia notable que se imponía entre los hechos recogidos por uno de ellos y los mecanismos formales analizados por el otro, lo que los llevó a colaborar juntos una vez más, pero de un modo nuevo, para la realización acabada de esta obra.

Hay algo más. Las estructuras operacionales de la lógica del adolescente no sólo son interesantes en sí mismas. Proyectan además, y de modo retroactivo, una clara luz sobre el conjunto de las estructuras anteriores características de la lógica concreta del niño. En efecto, las únicas operaciones lógicas de las que el niño es capaz en el nivel del pensamiento concreto consisten en "agrupaciones elementales" de clases y relaciones,

[1] Véase Piaget, *Traité de logique* (París, Colin, 1949), págs. 264-286 y sobre todo *Essai sur les transformations des opérations logiques* (París, Presses Universitaires de France, 1962), cap. 2.

fundadas unas sobre una primera forma de reversibilidad que puede llamarse *inversión* (negación) y otras sobre una segunda forma de reversibilidad: la *reciprocidad*. Pero, no existe, en el nivel de las operaciones concretas de clases y relaciones, una estructura de conjunto general que fusione en un sistema único las transformaciones por inversión y las transformaciones por reciprocidad. El grupo de las cuatro transformaciones que es propio de la lógica proposicional del adolescente (inversión; reciprocidad; inversión de la recíproca o reciprocación de la inversa; transformación idéntica) muestra, por el contrario, de qué modo las dos formas de la reversibilidad operatoria terminan por coordinarse en un sistema único, mientras que la combinatoria propia de los reticulados de proposiciones se constituye gracias a una generalización de la clasificación. En otros términos, la doble estructura que caracteriza al pensamiento formal aparece claramente como el producto de coordinaciones que alcanzan una meseta de equilibrio final (lo cual no excluye en absoluto las nuevas integraciones y superaciones continuas propias del pensamiento adulto). Por ello, el análisis de los mecanismos formales es indispensable para la plena consecución de una teoría operatoria de la inteligencia que se había propuesto interpretar, paso a paso, las construcciones sucesivas y jerárquicas del pensamiento a lo largo de su desarrollo.

Por otra parte, para asegurar mejor la unidad de los dos objetivos perseguidos en esta obra —descripción de los diferentes pasajes de la lógica del niño a la del adolescente y descripción de las estructuras formales que marcan la culminación del desarrollo operatorio de la inteligencia—, los autores trabajaron en colaboración para que quedase asegurada la unidad de redacción de este volumen. Cada uno de los capítulos del 1 al 15 (primera y segunda partes) incluye una parte experimental, obra del primer autor y un breve análisis final, obra del segundo, destinada a despejar las estructuras proposicionales o formales que intervienen respectivamente en cada caso particular.[2] Los capítulos 16 y 17 (comienzo de la tercera parte) pertenecen al segundo autor, mientras que el capítulo 18 se escribió conjuntamente. En cuanto a los problemas específicos de la inducción experimental enfocados desde el punto de vista del funcionamiento del pensamiento (en oposición a las presentes investigaciones estructurales) constituirán el tema de una obra especial del primer autor.[3]

B. I. y J. P.

[2] Para el simbolismo de las operaciones proposicionales empleado en las partes finales de estos capítulos y en el capítulo 17, véase Piaget, *Traité de logique* (París, Colin, 1949), cap. 5.

[3] Esta segunda obra contendrá en particular una descripción más detallada de las técnicas de las experiencias y un cierto número de figuras explicativas.

PRIMERA PARTE

LA CONSTITUCION DE LA LOGICA DE LAS PROPOSICIONES

El primer problema que hay que resolver para explicar el pasaje del pensamiento concreto del niño al pensamiento formal del adolescente, es explicar cómo se elabora la lógica de las proposiciones, lógica de la que el niño del nivel concreto (nivel II: de 7-8 a 11-12 años) se muestra aún incapaz. La experiencia muestra que, después de un largo período durante el cual sólo se utilizan las operaciones propias de las agrupaciones de clases y relaciones, y de las estructuras numéricas y espaciotemporales que de ellos resultan, los comienzos del nivel III (subestadio III A de 11-12 a 14-15 años y subestadio III B a partir de los 14-15 años) están marcados por la organización de operaciones nuevas que afectan a las proposiciones mismas y no ya solamente a las clases y relaciones que constituyen su contenido.

Para estudiar el problema que presenta esta elaboración, hay que analizar de qué modo se las ingenian los niños o adolescentes del nivel III para resolver problemas que aparentemente sólo son concretos pero que la experiencia indica que su solución sólo se encuentra en este nivel III y que supone en realidad el empleo de las operaciones interproposicionales. La primera parte de la presente obra se consagrará a este análisis.

CAPITULO I

LA IGUALDAD DE LOS ANGULOS DE INCIDENCIA Y DE REFLEXION

y las operaciones de implicación recíproca [1]

El objetivo de esta investigación, como por otra parte de todas aquellas que constituirán esta primera parte, no reside en estudiar la formación operatoria de las nociones en cuestión. En efecto, ya conocemos la construcción de la noción de ángulo y sabemos que queda adquirida ya en el nivel de las operaciones concretas (nivel II).[2] Sin embargo, el hecho de que esta noción le sea conocida desde mucho tiempo antes en el nivel de las operaciones formales es precisamente el que hace que resulte instructiva la manera como el niño de este estadio III razona para descubrir la igualdad entre los ángulos de incidencia y reflexión. Uno de los objetivos de este estudio es el de intentar aislar los mecanismos operatorios que entran en juego en un razonamiento formal, cuando este razonamiento se refiere a nociones ya elaboradas en el nivel concreto.

El dispositivo experimental consiste en una especie de juego de billar, en el que un propulsor tubular (de resorte) que puede desplazarse en direcciones variables alrededor de un punto fijo impulsa a las bolas. Se lanza la bola contra una pared de proyección[3] y de este modo rebota en el interior del campo de juego. Se coloca un muñequito o una placa de tope en diferentes puntos sucesivos y se les solicita a los sujetos que apunten hacia ellos. Cumplido esto, cuentan lo que observaron.

Ahora bien, la igualdad entre los ángulos de incidencia y los de reflexión sólo se descubre en el nivel III A (11-12 a 14 años) y, en muchos casos, sólo se la formula en el nivel III B (14-15 años). Se trata, pues, de comprender por qué sólo se emplea tan tardíamente una noción muy familiar desde los 7-9 años, como es la de la igualdad entre

[1] Con la colaboración de H. Aebli, L. Müller y M. Golay-Barraud.

[2] Véase Piaget, Inhelder y Szeminska, *La géométrie spontanée de l'enfant*, cap. VIII y Piaget e Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, cap. XII.

[3] Con una pared de rebote de goma.

dos ángulos, para la inducción de una ley elemental y, sobre todo, por qué para este empleo son necesarias las operaciones formales. Esto es lo que indagaremos desandando brevemente el camino recorrido antes del ingreso en el nivel formal y examinándolo luego más profundamente.

§ 1. EL ESTADIO I

Durante el estadio I (hasta los 7-8 años) la atención de los sujetos se concentra ante todo en el buen o mal resultado práctico, sin tomar en cuenta el mecanismo e incluso dejando a menudo de lado la intervención de los rebotes. Resulta entonces que, por lo general, no conciben la trayectoria de la bola como una trayectoria formada por segmentos rectilíneos, salvo al final del estadio, sino que la piensan como si describiera una especie de curva:

Dan (5;2) al comienzo acierta: *"Creo que funciona porque va en el mismo sentido."* El mismo ajusta el tubo que sirve para impulsar la bola pero opera mediante tanteos empíricos. Luego pregunta espontáneamente: *"¿Por qué a veces hay que hacer girar el tubo?... No, allí hay que colocarlo* (no acierta). *Si se pudiera colocar un poco más lejos..."* (lo hace y acierta). Sin embargo, aunque Dan consigue así dirigir la dirección de sus rebotes, no tiene conciencia alguna de que éstos forman ángulos: describe con el dedo la trayectoria como si fuera una curva no tangente a la pared de rebote, considerando el punto de llegada y el de partida pero sin ocuparse de los puntos de rebote.

Wirt (5;5): *"Salió por allí y se fue por allí... Seguro que voy a poder"*, etcétera. De tanto en tanto acierta, pero con el dedo describe las trayectorias únicamente con una forma curvilínea que no toca las paredes del dispositivo; sólo se ocupa de los puntos de llegada como si no hubiera rebotes.

Nan (5;5) se asombra por el contrario ante el rodeo de la bola que comienza por tocar las paredes: *"Siempre va para allá."* Pero no logra ajustar su tiro: *"¡Oh! Siempre va para allá... después irá."*

Pit (5;5) observa, a propósito de uno de sus tiros (que, por otra parte, falla): *"La bola fue derechito"* (¡como si fuese una excepción!). ¿Por qué no acertaste? *"Yo creí que le iba a acertar"* (no hay comprensión).

Ant (6;6) toma conciencia a la vez de la existencia de rebotes y del carácter rectilíneo de los segmentos de la trayectoria: *"Ella* (la bola) *golpea ahí; luego va para allá"* (señala líneas rectas).

Per (6;6) en cambio, permanece aún, a pesar de su edad, en la concepción de las trayectorias curvilíneas: *"Va allá y da vuelta para otro lado"* (gesto de curva).

Vemos, pues, en qué consiste el interés de las reacciones de este estadio: se trata de comportamientos de niños que saben actuar, y a veces obtener lo que se proponen, pero que aún no logran interiorizar sus acciones en operaciones, ni siquiera concretas. En efecto, una opera-

ción concreta no sólo es una acción interiorizada que se combina con otras en sistemas de conjunto reversibles: también es, y por ello mismo, una acción acompañada de una toma de conciencia de su propio mecanismo y sus propias coordinaciones. Ahora bien, lo que falta en este nivel son, precisamente, estos diversos caracteres: el sujeto sólo actúa para obtener su objetivo, y no se pregunta acerca de cómo lo logra. Sólo a partir de la finalización del estadio (alrededor de los 6; 6-7 años) toma conciencia del carácter rectilíneo de los segmentos de la trayectoria y de la existencia de los rebotes; en consecuencia no puede observar la presencia de ángulos en el punto de rebote.

§ 2. EL ESTADIO II (NIVELES II A y II B)

El nivel II A marca el comienzo de las operaciones concretas en el sentido definido hace un instante:

Vir (7;7) acierta después de algunos intentos. Muestra con el dedo, luego dibuja trayectorias de dos segmentos rectilíneos y dice: *"Para apuntar más a la izquierda, hay que girar* (el tubo) *a la izquierda."*

Turf (7;10): *"Sé más o menos adónde va"*; en efecto, muestra con un gesto un rebote de ángulo muy agudo cuando el tubo se dirige hacia arriba y un ángulo muy obtuso cuando se lo baja; de este modo manifiesta una especie de intuición global de la igualdad entre los ángulos de incidencia y los ángulos de reflexión, pero, por supuesto, sin explicitar el fenómeno, ya que no divide el ángulo total indicado por el gesto en dos ángulos iguales.

Bend (8;0): *"Es la esquina* (el ángulo descripto por el rebote) *lo que hace girar: se cambia el contorno* (la magnitud del ángulo) *cuando se cambia el tubo* (= la inclinación del tubo)." Como el sujeto anterior, indica un ángulo muy agudo cuando el tubo está poco inclinado y un ángulo muy obtuso cuando el tubo tiene una fuerte inclinación. Se le pregunta a qué llama contorno y nos señala la apertura del ángulo, con un gesto que indica que piensa en la generación del ángulo por la rotación progresiva del tubo y por la amplitud creciente del rebote así producido.

Desi (8;2): *"La bola sube siempre más arriba cuando el tubo está más arriba"*, luego: *"La bola irá allí* (más lejos) *porque el tubo está más inclinado: coloco hacia arriba con los ojos* (= localizo el punto de rebote) *y luego la goma* (= la banda de goma pegada sobre la pared de rebote) *miro los redondeles* (esto es, las placas de contacto que sirven como objetivo)."

En el nivel II B, las operaciones precedentes que engendran la representación de las rectas y los ángulos van acompañadas de una coordinación cada vez más precisa entre la inclinación del tubo y la línea de reflexión:

Nic (9;4): "*Hay que desplazar el tubo siguiendo el lugar de la placa* (del objetivo): *la bola debe formar una línea oblicua con la placa.*"

Kar (9;6): "*Cuanto más dirijo el tubo en este sentido* (a la izquierda, es decir orientado hacia arriba) *la bola vendrá más así* (ángulo muy agudo) *y cuanto más lo coloco así* (inclinado hacia la derecha) *la bola irá más así* (ángulo obtuso creciente)." Kar incluso llega a descubrir que la bola vuelve a su punto de partida cuando el tubo está "*totalmente derecho*", es decir, perpendicular a la pared de rebote.

Baer (9;6): ¿Cómo lo explicas? "*Porque debe estar a la misma distancia de la placa* (muestra el ángulo que se abre al alejarse la placa de contacto, y no la longitud de los trayectos entre el tubo y el punto de rebote o entre éste y la placa de contacto)."

Ulm (9;8): "*Cuanto más se empuja el tubo hacia arriba, la bola va cada vez más así* (ángulo pequeño) *y cuanto más se lo empuja hacia abajo, va siempre más así* (ángulo grande)." Explícame mejor lo que ves. "*Veo además esto* (el objetivo), *y nada más, porque gira junto con el tubo* (= porque la dirección del trayecto comprendido entre el punto de rebote y el objetivo se desplaza con la del tubo)."

Dom (9;9): "*Golpea allí, luego va allá* (muestra ángulos iguales repitiendo la fórmula para diferentes inclinaciones del tubo)."

Observamos, pues, que estos sujetos logran aislar todos los elementos necesarios para el descubrimiento de la ley de la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión y, sin embargo, no logran ni construir esta ley ni, *a fortiori*, formularla verbalmente. Ello se explica porque, al proceder mediante simples operaciones concretas de seriaciones y correspondencias entre las inclinaciones de los dos segmentos de trayectorias (antes y después del rebote), no buscan la causa de las correspondencias halladas y sólo consideran los segmentos presentes desde el punto de vista de sus direcciones, sin ocurrírseles dividir en dos ángulos iguales (incidencia y reflexión) al ángulo total que estos dos segmentos forman entre sí.

Comparados con los sujetos del estadio I, los de los niveles II A y II B ya no se limitan únicamente a actuar, sino que interiorizan sus acciones en forma de operaciones de desplazamiento o de ubicación: toman, pues, conciencia de que el tubo puede desplazarse según ciertas inclinaciones a partir del hecho de que el trayecto de la bola está compuesto por dos segmentos rectilíneos y, sobre todo, a partir de que estos dos segmentos forman entre sí un ángulo (cuyo vértice superior coincide con el punto de rebote) que varía según las inclinaciones del tubo. Entonces logran seriar estas inclinaciones en "más inclinada" o "más a la izquierda", "más arriba", etcétera, o en "menos inclinada", etcétera, lo cual equivale simplemente a traducir en operaciones coordinadas de se-

riación las acciones más o menos bien seriadas que saben ejecutar a partir del nivel I. Logran asimismo seriar las inclinaciones o las direcciones de los segmentos de trayectos comprendidos entre el punto de rebote y el objetivo ("la bola sube siempre más arriba" o más adelante, la bola "irá allí" o allá, etcétera). Por último, y sobre todo, establecen una correspondencia entre las inclinaciones o direcciones del tubo (y del primer segmento de trayectoria de la bola) y las inclinaciones o direcciones de estos segundos segmentos de la trayectoria: "cuanto más (inclinado, etcétera) está el tubo, etcétera, tanto más la bola irá (hacia abajo, etcétera)".

Si simbolizamos las inclinaciones crecientes del tubo (y del primer segmento de trayectoria de la bola que sale del tubo) mediante las letras α, β, γ, etcétera, y las inclinaciones del segundo segmento de trayectoria (entre el punto de rebote y el objetivo) mediante los signos α', β', γ', etcétera, las operaciones de seriación y correspondencia que los sujetos de este estadio II pueden establecer son las siguientes:

1) $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ o $\alpha' < \beta' < \gamma' < \ldots$

y

2) $\alpha \leftrightarrow \alpha'$; $\beta \leftrightarrow \beta'$; $\gamma \leftrightarrow \gamma'$; etcétera (donde el signo $\leftrightarrow$ significa la correspondencia).

¿Por qué entonces esta correspondencia entre dos seriaciones no conduce al descubrimiento de la ley de la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión? Porque estos sujetos se atienen a sus operaciones concretas de seriación y correspondencia sin buscar la razón de esta correspondencia, del mismo modo que los sujetos del estadio I sabían actuar adecuadamente para lograr el objetivo, pero sin buscar las razones de sus acciones (desplazamientos del tubo, etcétera). Permanecen, pues, en una lectura de los hechos, esta vez exacta porque se la organiza mediante operaciones concretas de seriación y correspondencia, pero no buscan la razón de estos hechos mediante operaciones formales de implicaciones, etcétera, que constituyen las condiciones del pensamiento hipotético-deductivo.

Al no buscar explicación para los hechos observados, se atienen, por otra parte, a una observación grosera o global, por cierto mucho más evolucionada que la del nivel I, pero aún demasiado global para conducir a una descomposición de los ángulos observados. De este modo se limitan a señalar inclinaciones o direcciones, y consideran el ángulo total comprendido entre los dos segmentos de la trayectoria (Bend: el "contorno"; Ulm: "gira", etcétera), pero sin dividir este ángulo total en dos partes iguales: el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Por ello estos sujetos, por más que se encuentren muy cerca del descubrimiento de la ley y por más que posean de hecho todos sus elementos, no la descubren aún porque carecen de las operaciones formales necesarias para la búsqueda de una hipótesis explicativa.

§ 3. EL ESTADIO FORMAL (NIVELES III A y III B)

Los sujetos de este último estadio logran esta vez el descubrimiento de la ley de la igualdad de los ángulos, descubrimiento al comienzo parcial y lento, con verificación o rechazo de varias hipótesis particulares, luego descubrimiento completo y rápido porque se halla dirigido por la formulación de una hipótesis acerca de la necesidad de una equivalencia entre las dos partes sucesivas de la trayectoria.

Veamos ante todo un caso representativo del nivel III A:

Bon (14;8) al comienzo invoca la fuerza de propulsión, pero comprueba que las trayectorias son las mismas cualquiera sea la fuerza con que se lance la bola. Luego recurre al papel desempeñado por las *"distancias, cómo hay que ubicar el tubo"*. Establece entonces las correspondencias concretas tal como ocurre en el nivel II: *"Es la posición de la palanca* (del tubo): *cuanto más se sube la placa de contacto, tanto más hay que levantarla"* (la palanca)." Coloca una regla para marcar la trayectoria de la bola entre el punto de rebote y el objetivo para verificar la correspondencia con la dirección del tubo. Formula entonces la hipótesis de que el ángulo siempre es recto: *"Tiene que formar un ángulo recto con la palanca"*. Pero después de varios ensayos concluye: "No, *para arriba* (cuando se endereza el tubo) *no sirve.*" ¿Nunca es un ángulo recto? *"Sí, sólo es para una posición."* ¿Y si no es así? *"Al girar, uno debería ser más pequeño, el otro más grande. ¡Ah! son iguales* (muestra el ángulo de incidencia y el de reflexión)."

A partir de ese momento, una vez encontrada la correspondencia concreta entre las inclinaciones, se inicia la búsqueda de una hipótesis general susceptible de explicar estas correspondencias. El sujeto Bon primero piensa en el ángulo recto, luego comprueba que el ángulo total a veces es agudo, otras obtuso: lo descompone entonces en dos ángulos iguales (incidencia y reflexión).

Pero las hipótesis propias del nivel III A están aún muy cerca de las correspondencias concretas, en el sentido de que simplemente buscan expresar el factor general que las explique. Lo característico del nivel III B es la presencia de una nueva exigencia, ausente en el nivel II B y aún poco explícita en el nivel III A: la necesidad de encontrar un factor no sólo general sino además necesario, es decir, capaz de expresar, además de las relaciones constantes, la razón misma de estas relaciones. Dicho en otros términos, los sujetos del nivel III A ya no van a conformarse, ni con establecer, como en II B, una correspondencia entre las inclinaciones del tubo y las del trayecto comprendido entre el punto de rebote y el objetivo, ni con buscar, como en III A, un factor constante y único que traduzca estas correspondencias: de entrada se preguntarán por qué cierta diferencia de inclinación x_1 del tubo corresponde *necesariamente* a una diferencia x_2 en el trayecto punto de rebote-objetivo y esta bús-

queda de la razón necesaria, establecerá la oposición entre el pensamiento formal, con sus operaciones de implicación o equivalencia (esto es implicación recíproca) y el pensamiento concreto, con sus simples comprobaciones de constancias. Esto es lo que, de entrada, nos muestra el siguiente sujeto que, como Bon, comienza con la hipótesis del ángulo recto, pero que luego se orienta rápidamente a la búsqueda de la necesidad:

Def (14;8) al comienzo se imagina que los dos segmentos de la trayectoria forman siempre un ángulo recto. Pero luego de tres intentos, dice: "*Cuanto más se acerca el objetivo al propulsor* (el tubo) *tanto más tiene que* (¡necesidad!) *acercarse el propulsor al objetivo* (lo que evidentemente significa que las dos inclinaciones —del propulsor y del trayecto entre el objetivo y el punto de rebote se implican recíprocamente—)" ¿Qué quiere decir: "También debe acercarse el propulsor al objetivo"? "*Por ejemplo, si aquí hubiera una línea* (señala una línea perpendicular al punto de rebote y que parte de él), *sería necesario que aquí tuviéramos la misma amplitud* (entre el tubo y esta línea) *que allá* (entre la línea y el objetivo)." ¿Por qué? "*Si el propulsor se coloca así* (perpendicular al punto de rebote), *la bola volverá exactamente del mismo modo.*" Luego coloca el tubo en un ángulo de 45 grados y verifica que el ángulo formado por el objetivo y la línea ideal perpendicular también es de 45 grados: "*Forma un ángulo recto y aquí se tiene más o menos la misma distancia que allá* (las dos aperturas de los ángulos)." Luego pasa a formar ángulos cualesquiera y verifica de nuevo su ley de igualdad. Se le objeta entonces que tal vez esta ley no es muy general, a lo cual responde: "*Depende también de la pared de rebote, de que esté bien derecha, y también del plano: tiene que ser bien horizontal. Pero si la pared de rebote fuera oblicua, sería necesario trazar una perpendicular a la pared de rebote y también se necesitaría la misma distancia desde el propulsor* (a la línea y desde ésta) *hasta el objetivo: la ley sería la misma.*" Se modifica la pared de rebote reemplazando la goma con madera: "*A lo mejor la madera es menos elástica: la bola sería lanzada con menos fuerza.*" Y entonces ¿qué pasa con su ley? "*La ley no varía.*"

Se comprueba a partir de este primer caso la aparición de las novedades psicológicas que oponen pensamiento formal y pensamiento de los niveles concretos: la exigencia de necesidad ("el propulsor también *debe...*", "*sería necesario* que aquí y allá se tuviera la misma amplitud", "se *necesitaría* también la misma distancia", etcétera) es paralela a la capacidad de formular hipótesis o construcciones hipotéticas no proporcionadas por la observación directa (trazar una perpendicular ideal a partir de la pared de rebote, etcétera), la confianza en la generalidad de la ley, porque se la concibe como necesaria, aun cuando se modifiquen sus condiciones "la ley no varía", etcétera). Resulta entonces claro que en este nivel (después de una preparación que se inicia a partir del nivel III A) se superponen operaciones nuevas a las operaciones concretas. En este caso particular, ¿en qué consisten? Los siguientes sujetos, sumados al precedente, nos permitirán aclarar la pregunta:

Gug (14;4) después de algunos ensayos dice: *"Cuanto más se va en ángulo recto* (es decir cuanto más el tubo se acerca a la posición perpendicular en relación con la pared de rebote) *tanto más la bola vuelve hacia su punto de partida. Cuanto más horizontalmente se tire* (más se incline el tubo) *más se aleja la bola de su punto de partida."* ¿Siempre es así? *"Sí, por lo menos eso creo: es necesario probar."* Continúa con sus ensayos y cuando se produce alguna dispersión fortuita provocada por el dispositivo, tranquilamente afirma: *"No es normal."* Luego de nuevas pruebas concluye: *"Es necesario encontrar el ángulo"*, y al comienzo busca la igualdad en los ángulos complementarios comprendidos entre la pared de rebote del dispositivo y el tubo o el trayecto que va desde el punto de rebote hasta el objetivo; por último encuentra que: *"Es necesario trazar la perpendicular* (a la pared de rebote)." Descubre entonces la igualdad constante de los ángulos de incidencia y reflexión.

Mül (14;3) comienza por una sucesión de correspondencias: *"Yo estaba aquí y fue en esta dirección"*, etcétera, y: *"Se cambia el ángulo para ver hacia dónde va."* Al disminuir sistemáticamente el ángulo total descubre entonces la proposición fundamental: *"Si tiro derecho, con un ángulo recto* (es decir con el tubo perpendicular a la pared de rebote) *va en línea recta."* Luego inclina progresivamente el tubo propulsor, formando ángulos α_1; β_1; γ_1; etcétera y comprueba que, a medida que estos ángulos aumentan, sus complementarios α'_1; β'_1; γ'_1 disminuyen (α', β' son pues los ángulos comprendidos entre el tubo y la pared de rebote): *"Cuanto más chico se hace el ángulo aquí* (α'_1; β'_1; etcétera) *más grande se hace el ángulo allá* (α_1; β_1; γ_1)." Logra entonces la igualdad que buscaba a partir del momento en que comprendió que en el caso de la perpendicularidad del tubo, la bola vuelve a su punto de partida: *"Este ángulo* (α'_1) *es el mismo que aquél* (α'_2), *es necesario hacerlo igual a aquél* (α'_2). *Voy a ver qué pasa* (controla formando algunos ángulos diferentes). *Sí, creo que es así: es necesario imitar exactamente este ángulo* (los complementarios α'_1 y α'_2; etcétera)."

Pom (15;5) también comienza estableciendo correspondencias: *"Miro un poco el ángulo... Cuanto más arriba se quiere tirar, más grande tiene que ser el ángulo* (calcula, del mismo modo que Mül, a partir del complementario)." Para verificar esta hipótesis coloca espontáneamente el tubo en forma perpendicular a la pared de rebote: *"Si la palanca está derecha, la bola vuelve de la misma manera."* Después de lo cual ajusta el tubo en tres posiciones diferentes, pero sin desplazar el objetivo y sin tirar, y concluye enseguida: *"Se necesitan dos ángulos: la inclinación de la palanca es igual al ángulo que forma la trayectoria de la bola* (de la pared de rebote al objetivo)."

Lam (15;2): *"La bola rebota según la inclinación* (del tubo)... *Sí, depende del ángulo: tracé una línea imaginaria perpendicular* (a la pared de rebote): *el ángulo formado por el objetivo y el ángulo formado por el tubo con la línea imaginaria serán los mismos."*

Rev (15;4): *"Es un ángulo recto* (intentos). *No: esta inclinación debe ser la misma que aquélla."* Cuando se producen desviaciones fortuitas causadas por el dispositivo, afirma: *"No cambié: el coso no anda bien."*

God (15;9) después de algunos intentos infructuosos: *"Tenía que encontrar el ángulo de rebote."* Al comienzo señala $\alpha'_1 = \alpha'_2$, como Mül, luego traza la perpendicular y muestra los ángulos de incidencia y reflexión: *"Los dos deben ser iguales."*

Fort (16;0) comienza con algunos intentos: *"Hay que desplazar la palanca en función del objetivo y viceversa* (reciprocidad). *Tiene que haber un ángulo, pero no siempre es el mismo* (sigue con sus ensayos). *Evidentemente todo varía."* Luego: *"Hay que pensar en líneas rectas. A medida que la palanca se desplaza, se encuentra la misma distancia en el otro sentido: hay que desplazar teniendo en cuenta la media* (la perpendicular a la pared de rebote a partir del punto de rebote: lo dibuja de modo espontáneo). *Las dos distancias* (las aperturas de los ángulos) *de ambos lados indican siempre los ángulos* (de incidencia y reflexión)."

Jan (16;4): *"Se trata de encontrar el ángulo correspondiente: cuanto más cerrado es el ángulo del objetivo, más cerca del medio va la palanca y viceversa."* ¿Puedes medir? *"Se trata más o menos de un ángulo recto. No, varía aquí del mismo modo que aquí* (igual dibujo que Fort)."

Berg (16;6) después de haber dado explicaciones semejantes se lo enfrenta con una pared de rebote de madera y ya no de goma: *"Creo que se trata de la misma ley. Sí, estoy seguro: tomo la perpendicular y miro las distancias: sí, ahora los ángulos deben ser iguales."*

Estos razonamientos, si bien difieren en unos cuantos puntos, presentan algunos elementos esenciales en común que habrá que despejar para poder caracterizar las diferencias entre el pensamiento formal y el pensamiento concreto en lo referente a este problema particular.

El punto de partida general del descubrimiento de la ley por estos sujetos parece residir en que, una vez establecidas las correspondencias concretas entre las inclinaciones del tubo y los trayectos de la bola a partir de la pared de rebote, se concibe que estas correspondencias implican una reciprocidad necesaria: una de las inclinaciones implica a la otra y recíprocamente. Fort lo expresa cuando afirma "hay que desplazar la palanca en función del objetivo y viceversa". Pero, esta reciprocidad, que simplemente añade la idea de implicación mutua a la idea de correspondencia biunívoca y recíproca, no implica aún por sí sola la igualdad (como lo demuestra el mismo Fort que al comienzo se sorprende ante la variación de los ángulos). La comprobación (efectiva o incluso, en ciertos casos, mental) de que, cuando el tubo no está en posición inclinada (por lo tanto perpendicular a la pared de rebote) la bola vuelve a su punto de partida —segundo punto común a todas las respuestas— conduce de la reciprocidad a la igualdad: a partir de ahí se deduce enseguida que si la inclinación nula del tubo implica la inclinación nula del trayecto de la bola (en el sentido del retorno) y recíprocamente, toda inclinación de uno implicará una inclinación igual del otro.

Una vez en posesión de esta doble afirmación (implicación mutua de las inclinaciones y retorno de la bola a su punto de partida en el caso de la inclinación nula), el sujeto llega entonces o a imaginar una perpendicular a la pared de rebote (a partir del punto de rebote de la bola) lo cual le permite descubrir la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión, o bien a buscar los ángulos complementarios (situados entre el tubo y la pared de rebote o entre ésta y el trayecto de la bola después de haber rebotado), lo que también lo lleva a establecer su igualdad. En ambos casos entonces se construye la ley a partir de la búsqueda de una razón necesaria de las inclinaciones observadas; las seriaciones y correspondencias establecidas hasta el momento anterior no bastan para el descubrimiento de la relación existente entre los ángulos, ni siquiera es suficiente para la descomposición del ángulo total comprendido entre los dos segmentos sucesivos de la trayectoria de las bolas en dos ángulos parciales.

§ 4. CONCLUSION: PASAJE DE LA CORRESPONDENCIA (CONCRETA) A LA IMPLICACION RECIPROCA (FORMAL)

A pesar de lo que acabamos de comprobar en cuanto a los descubrimientos característicos de los sujetos del nivel III, nos queda aún por comprender, en este caso particular, qué es lo que el pensamiento formal añade a las operaciones concretas, hasta tal punto que los sujetos del nivel II parecen *a posteriori* acercarse a la formulación de la ley. ¿En qué consiste, pues, el aporte de las operaciones formales en la solución de un problema que, a primera vista, no requiere otra cosa que correspondencias e igualaciones? Sin duda alguna, el contexto de las reacciones es muy diferente: el razonamiento mediante la formulación de hipótesis y la necesidad de demostración se produce a continuación de la simple comprobación de las relaciones. En otros términos, el pensamiento opera de ahí en adelante sobre lo posible y lo necesario conjuntamente, en vez de atenerse a una deducción que sólo se refiere a lo real. Sin embargo, no por ello es menos cierto que entre la correspondencia unívoca y recíproca de las inclinaciones, descubierta en el nivel II, y la reciprocidad que conduce a la igualdad de los ángulos, características del nivel III, el matiz existente parece muy sutil en tanto no se esté en condiciones de formular la diferencia entre las operaciones respectivas utilizadas en estos dos niveles.

Ahora bien, esta diferencia existe, y si bien en este primer caso parece aún débil, ya nos proporciona un ejemplo de la oposición general entre las operaciones concretas y formales, tal como las volveremos a encontrar, de un modo más acentuado, en los capítulos siguientes. Esta diferencia general consiste en que las operaciones concretas, al mismo tiem-

po que constituyen sistemas de conjuntos (clasificaciones, seriaciones, correspondencias, etcétera) operan gradualmente sin tomar en cuenta en el caso de cada relación parcial al conjunto de las otras; en cambio, lo propio de las operaciones formales reside en considerar, en cada caso, todas las combinaciones posibles y agrupar así las relaciones parciales en función continua del conjunto de las partes. De este modo cuando dos clases A_1 y A_2 y sus complementarias A'_1 y A'_2 dan lugar a cuatro productos elementales solamente ($A_1 A_2 + A_1 A'_2 + A'_1 A_2 + A'_1 A'_2$), las proposiciones p y q y sus negaciones $\bar{p}$ y $\bar{q}$ dan a partir de sus cuatro conjunciones elementales $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$, 16 combinaciones que caracterizan respectivamente a la implicación, la disyunción, etcétera, según que estas conjunciones elementales sean tomadas una a una, dos a dos, tres a tres, las cuatro juntas o ninguna.[4]

Por ejemplo, la implicación de q por p corresponde a la suma de las tres conjunciones $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$; la implicación de p por q a la suma $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ y la equivalencia de p y q (o implicación recíproca) a la suma de las dos conjunciones $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$. Pero, para afirmar la verdad de una de estas tres relaciones $p \supset q$ o $q \supset p$ o $p = q$ es necesario además establecer respectivamente la falsedad de $(p \cdot \bar{q})$ para $p \supset q$; de $(\bar{p} \cdot q)$ para $q \supset p$ y de $(p \cdot \bar{q})$ así como de $(\bar{p} \cdot q)$ para $p = q$.

Ahora bien, las diferencias entre el pensamiento del nivel concreto, que se atiene a las correspondencias establecidas de próximo en próximo entre las inclinaciones del tubo propulsor y las del trayecto de la bola (de la pared de rebote al objetivo) y el pensamiento del nivel formal, que directamente va en búsqueda de las reciprocidades necesarias, residen sin duda alguna y por completo en esta oposición existente entre estas operaciones que operan de próximo en próximo características de las agrupaciones de clases y relaciones y las operaciones combinatorias propias del "conjunto de las partes", que constituyen la lógica de las proposiciones. En efecto, los sujetos del nivel II se limitan a comprobar de manera sucesiva las correspondencias en cuestión y a concluir a partir del cuadro construido de este modo que cuanto más se incline el tubo más se inclina a su vez el trayecto de la bola entre la pared de rebote y el objetivo: con seguridad aquí hay una ley, pero constituye el simple resumen de las comprobaciones hechas una por una. Si los sujetos del nivel III se colocan en cambio de entrada y simultáneamente desde el punto de vista del conjunto de los posibles y del de las conexiones necesarias, es porque se hallan en posesión de operaciones a la vez combinatorias y susceptibles de asegurar la necesidad deductiva. Por ello, a partir del estableci-

[4] Se puede, va de suyo, construir el mismo conjunto de 16 partes con las dos clases A_1 y A_2 y sus cuatro productos elementales, pero únicamente estos productos intervienen en las "agrupaciones" del nivel concreto (II A y B), mientras que las combinaciones propias al "conjunto de las partes" son características del nivel formal.

miento de sus primeras correspondencias, no se limitan a comprobar los vínculos de hecho sino que se dedican a buscar su explicación, es decir, a considerarlas como implicaciones. Sin duda la implicación $p \supset q$ es todavía y en cierto sentido una comprobación de hecho que equivale a establecer que el caso $(p \cdot \bar{q})$ no se produce nunca. Pero para establecerla, es necesario además considerar las cuatro posibilidades $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$; además la implicación no es sino la reunión de tres posibilidades (la primera, la tercera y la cuarta) reunidas mediante la operación (v) que significa "o", es decir una adición de posibilidades y no de realidades.

En efecto, ante una correspondencia $p \cdot q$ (llamemos p al enunciado de una cierta inclinación del tubo propulsor y q al enunciado de la inclinación correspondiente al trayecto de la bola entre la pared de rebote y el objetivo), los sujetos del nivel III no se limitan a comprobar la existencia de semejante conjunción como lo hacen los del nivel II que se conforman con dar cuenta de la correspondencia: excluyen la posibilidad $(p \cdot \bar{q})$, es decir, introducen por hipótesis un vínculo de implicación entre p y q; pero también excluyen $(\bar{p} \cdot q)$, es decir, que también introducen como hipótesis un vínculo de implicación entre q y p. Operan pues de entrada desde la comprobación de la conjunción $p \cdot q$ hasta la hipótesis de una implicación recíproca $p \underset{C}{\supset} q$ con la presunción de que esta reciprocidad $p \underset{C}{\supset} q$ o $p = q$ (que en sí no es una igualdad de contenido sino una simple equivalencia desde el punto de vista de la verdad de las proposiciones) encubre la igualdad de algo.

Entonces el razonamiento de los sujetos de 14-16 años, de este modo fundado sobre la doble consideración de las combinaciones posibles y de las relaciones necesarias, se prolonga en una verdadera construcción hipotético-deductiva. En vez de limitarse, como los sujetos del nivel II, a observar la existencia de diversas correspondencias, a veces incluido el caso en que el tubo no está inclinado y que la bola vuelve a su punto de partida (pero sin extraer de este caso particular consecuencias generales), los adolescentes del nivel III buscan, tarde o temprano (y a menudo de entrada), establecer lo que implica el caso privilegiado de la inclinación nula: al comprobar que la bola vuelve entonces exactamente a su punto de partida extraen enseguida la conclusión de que las inclinaciones correspondientes deben ser iguales y, en consecuencia, también los ángulos que las determinan; después de haber verificado con uno o dos casos más, generalizan por fin la conclusión a todos los casos.[5]

En otros términos, el razonamiento de los sujetos del nivel III B sería más o menos el siguiente (véase como ejemplo el caso tan claro de Def):

[5] Señalemos que el razonamiento elemental por recurrencia es accesible al nivel concreto (véase *La géométrie spontanée de l'enfant*, cap. IX, punto 4). Lo que lo vuelve tardío, en este caso particular, es que las implicaciones recíprocas previas dirigen toda la deducción del sujeto.

1) $p \underset{c}{\supset} q$ porque $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ son verdaderos y $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ falsos; donde p y q son la comprobación de inclinaciones correspondientes de valores respectivos x y y.

Ahora bien,

2) $(x = 0) \underset{c}{\supset} (y = 0)$

y

3) $(x = \alpha) \underset{c}{\supset} (y = \alpha)$ donde α es una inclinación determinada > 0

Por lo tanto,

4) $x \underset{c}{\supset} y$

y

5) $\wedge x \underset{c}{\supset} \wedge$, y donde $\wedge x$, y $\wedge y$ son los ángulos de incidencia y reflexión (o sus complementarios).

En una palabra, el descubrimiento de la igualdad de los ángulos es el resultado de la implicación recíproca, postulada desde el comienzo, entre las inclinaciones correspondientes, y no la inversa; y esta implicación recíproca difiere de la simple correspondencia concreta en cuanto es la resultante de un cálculo de los posibles y no sólo de las comprobaciones reales.

CAPITULO II

LA FLOTACION DE LOS CUERPOS [1] Y LA ELIMINACION DE LAS CONTRADICCIONES

Se coloca al sujeto ante un cierto número de objetos diversos y se le solicita que los clasifique según que floten o no sobre el agua; luego (una vez terminada la clasificación) se les pide que aclaren, para cada uno de los objetos, las razones de su clasificación. Luego el sujeto realiza la experiencia; para ello dispone de uno o varios recipientes de agua; por último, se le solicita que resuma los resultados observados, lo cual sugiere al sujeto, si no lo ha hecho de modo espontáneo, que formule la ley.[2]

Esta ley de flotación no se refiere, como la del capítulo anterior, a nociones accesibles todas en el nivel de las operaciones concretas, ya que ni la conservación del volumen ni, en consecuencia, la noción de densidad se elaboran de modo sistemático antes del nivel III A (11-12 años), mientras que la conservación del peso y algunos esquemas preparatorios de la noción de densidad se adquieren a partir del subestadio II B.

Ahora bien, la ley que debe encontrarse es la siguiente: los cuerpos flotan si tienen una densidad o un peso específico inferiores a los del agua. En esta ley intervienen dos relaciones: la de densidad (o relación del peso al volumen) y la relación entre el peso del objeto (su densidad si es pleno, o el peso de su materia y del aire que contiene) y el volumen de agua correspondiente. Además se trata de construir una clasificación que incluya la clase de los cuerpos que flotan sobre el agua y la de aquellos que no flotan, más otras dos clases eventuales: la de los cuerpos que flotan sobre el agua en ciertas situaciones y en otras no (por ejemplo los cuerpos huecos que pueden estar llenos o de aire o de agua) y la de los cuerpos que permanecen entre dos aguas. La ley buscada es, en definitiva, una relación entre dos grandes clases: la de los

[1] Con la colaboración de J. Nicolas y M. Meyer-Gantenbein.

[2] Con los sujetos más adultos se añade a esta técnica la introducción de tres cubos del mismo volumen, pero de densidades diferentes y un cubo vacío de paredes de "plexiglass" o de "plástico" (densidad cercana a 1) para permitir las comparaciones precisas con la densidad del agua.

cuerpos cuya densidad es inferior a la del agua y la de los cuerpos cuya densidad es superior.

Pero esta ley constituye también una relación única y no contradictoria. Ahora bien, para construir semejante relación, es necesario en realidad eliminar ante todo una serie de contradicciones a menudo difíciles de evitar (en la medida en que, por ejemplo, la explicación se oriente únicamente en la dirección del peso, puede entonces suceder que los cuerpos que flotan son a veces los más pesados y a veces los más livianos), luego debe aislarse el elemento común a varias explicaciones diferentes (peso, volumen, aire, etcétera). Si bien las contradicciones más simples pueden descartarse mediante la sola intervención de las operaciones concretas, en cambio la eliminación de las más finas y, sobre todo, la unicidad de la explicación final suponen un juego de implicaciones, esto es, la intervención de las operaciones formales de proposiciones. Entonces, como en el capítulo anterior, el objeto de este capítulo constituye una introducción al estudio del pasaje entre el pensamiento concreto y el pensamiento formal.

§ 1. ESTADIO I

El nivel I (hasta cerca de los 7-8 años) ofrece un gran interés para nuestro propósito: lejos de proporcionar de entrada el testimonio de la búsqueda de una explicación única y no contradictoria, los niños se satisfacen en cambio con interpretaciones múltiples y, a menudo, contradictorias entre sí. Aun más, desde el punto de vista de la clasificación en sólo dos clases (cuerpos flotantes y no flotantes) debe distinguir un subestadio I A durante el cual el sujeto ni siquiera logra establecer esta dicotomía elemental, porque sus juicios sucesivos acerca de un único objeto son aún contradictorios.

Subestadio I A

Los niños de este primer subestadio logran a veces prever que un objeto, que comprobaron si flotaba o no, conservará sus propiedades, pero, ya que no encuentran la explicación de este fenómeno, no extienden las propiedades a otros objetos análogos; además ni siquiera conciben que estas propiedades son necesariamente constantes (para un objeto idéntico) lo que torna imposible una lectura objetiva de la experiencia:

Iea (4 años) dice, por ejemplo, acerca de un pedazo de madera que *"permanece encima. El otro día tiré un pedazo en el agua y se quedó encima"*. Pero un momento después: "¿La madera? *Nadará en todas partes.* ¿Y esto (un pedazo más pequeño)? *La maderita se hundirá.* Pero ¿no dijiste que la madera nadará? *No, no dije eso.*" Cuando se le muestra un alambre por primera vez, dice: *"Se*

quedará arriba." Un momento después (segunda presentación): "*El alambre va al fondo* (no realizó la experiencia) ¿Y este peso (de metal)? *Nadará.* ¿Y la madera? *Nadará en todas partes.* ¿Y el alambre (tercera presentación)? *Nadará.*" Por último, acerca de dos agujas de metal exactamente iguales entre sí, afirma lo contrario: "¿Esta? *Flotará.* ¿Y ésta? *Se hundirá.*" Hay que añadir que si, por una parte, Iea generaliza tan poco, por la otra, sus explicaciones se reducen a lo siguiente: "¿La piedrita? *Se ahogará.* ¿Por qué? *Porque se queda abajo.*"

Mic (5 años) prevé que un tablón de madera se hundirá. La experiencia que sigue no lo hace cambiar de parecer: "(Apoya con todas sus fuerzas para mantenerlo bajo el agua) *¡Quédate allí, pícara!* ¿Siempre permanecerá sobre el agua? *No sé.* ¿Puede quedar en el fondo en otro momento? *Sí.*"

La clasificación resulta imposible con semejantes reacciones. Ante todo porque no se tienen razones que permitan distribuir los objetos en dos clases. Para construir la clase de los objetos que flotan y la de los cuerpos que no flotan, una primera posibilidad consiste en efecto en recurrir a una cualidad común que sería, al mismo tiempo, la razón de la flotación o del hecho contrario. Ahora bien, estos sujetos no recurren aún a explicaciones semejantes y se limitan a buscar la causa del hecho en su descripción. Es cierto que también pueden clasificarse los objetos *a posteriori*, considerando sus propiedades en la experiencia. Pero para ello es necesario que las propiedades sean constantes. Ahora bien, la clasificación resulta de nuevo imposible desde este segundo punto de vista puesto que: 1) un mismo objeto no conserva necesariamente sus propiedades (por ejemplo, el alambre en el caso de Iea y el tablón de madera en el caso de Mic); 2) dos objetos exactamente iguales no tienen las mismas propiedades (las agujas para Iea); 3) los objetos análogos tampoco las tienen (véase la maderita que se hunde y la madera gruesa que flota: Iea).

Se dirá que éstas no son contradicciones, sino simplemente una cierta inconstancia (fluctuaciones) atribuida a lo real. Por ejemplo, una misma nube puede producir lluvia en un momento dado y en otro no; de dos nubes semejantes, una puede producir lluvia y la otra no. Sin embargo el meteorólogo busca, a pesar de todo, generalizar y sigue, a pesar de los riesgos inherentes a su profesión, postulando la deductividad de lo real: entonces, explica las resistencias de lo real por la intervención del azar, y no obstante concluye que, en condiciones idénticas, los resultados serán los mismos. El niño del nivel I A, en cambio, no busca transformar lo real en algo deductible, y no sabe aún distinguir lo deductible de lo azaroso. Tampoco postula que, en condiciones iguales, los resultados serán semejantes. Es cierto que en algunos casos lo admite (por ejemplo, la madera que flota porque flotó "el otro día": Iea). Pero, precisamente, lo admite en ciertos casos pero no en otros, sin poder discernir las razones de repetición y las razones de variación.

Sería entonces cometer el "sofisma de lo implícito" atribuir a los sujetos del nivel I A los razonamientos probabilísticos del meteorólogo. Como a partir del estadio II A buscarán la constancia y construirán clases de cualidades generales, no hay razón alguna para no considerar estas reacciones sucesivas tal como ellas se presentan: conviene pues atribuir a los sujetos de los niveles II A, y siguientes, la búsqueda de la no contradicción y a los del nivel I A, no la búsqueda de la contradicción ni tampoco sin duda alguna, la impermeabilidad radical de la contradicción, pero sí, por lo menos, la indiferencia ante la contradicción cuando el problema causal no puede resolverse (tampoco se lo puede resolver en el nivel II A, pero el niño ya postula la posibilidad de una solución coherente y ello basta para impulsarlo a buscar la eliminación de las contradicciones).

Subestadio I B

En el nivel I B, el niño intenta clasificar los objetos de manera estable en objetos flotantes y no flotantes, pero no logra obtener una clasificación coherente por tres razones, la primera lógicamente legítima, pero las otras dos relativas al pensamiento preoperatorio. Estas tres razones son las siguientes: 1) al no encontrar la ley (de todos modos igualmente comienza a buscarla) el sujeto se conforma con explicaciones múltiples; formula entonces una serie de subclases difíciles de ordenar jerárquicamente; 2) ante la experiencia el niño encuentra nuevas explicaciones y agrega de este modo nuevas divisiones a su clasificación, pero sin reordenar el conjunto; 3) algunas de estas clasificaciones son contradictorias.

Tosc (5;6): Antes de experimentar distribuye en dos clases, los objetos que se le presentan: la clase B (objetos que permanecen sobre el agua) y la clase B' (objetos que se deslizan al fondo del agua). La clase B incluye siete subclases: A_1) Los objetos que *"nadan"* o flotan porque les corresponde por su naturaleza hacerlo: los barcos y los patos (*"Mi pequeño pato que nada como los verdaderos"*). A_2) Los pequeños (las *"piedritas muy pequeñas"*, las fichas, las agujas). A_3) Los livianos (las piedritas flotan *"porque no son pesadas"* y pertenecen así al mismo tiempo a las clases A_2 y A_3, pero una placa de aluminio flota porque es liviana sin ser pequeña). A_4) Los objetos chatos (ejemplo: *"Esta piedrita, porque es totalmente chata"*). A_5) Los objetos delgados (una lámina de madera). A_6) Los que tienen el mismo color que el recipiente ("¿Por qué este tablón se quedará encima? *Porque los dos son del mismo color*": el tablón y el recipiente). A_7) Los objetos que ya se quedaron sobre el agua (por ejemplo: un pedazo de madera *"porque antes se quedó"*).

La clase B' incluye las siguientes subclases: $\overline{A}_1$) Los objetos *"que no van sobre el agua"* por naturaleza (por ejemplo, un pedazo de vela: "¿Adónde irá? *Al fondo.* ¿Por qué? *Porque la vela no va sobre el agua.*" Se la coloca sobre el agua: "*Flota.* ¿Por qué? *Porque nada sobre el agua.*" De este modo la vela es agregada a la subclase A_1 de la clase B. $\overline{A}_2$) Los gordos. $\overline{A}_3$) Los pesados (con la

misma dificultad de identificación e interferencia que para A_2 y A_3. $\overline{A_7}$) Los que *"antes fueron al fondo"*. A_8) Los largos (un hilo de cobre va al fondo *"porque es largo"*). A_9) Aquellos sobre los cuales se apoyó algo (por ejemplo, una tapa de metal).

En esta clasificación se comprueba la realización de ciertos esfuerzos de asimilación (pequeño = liviano y, a veces, delgado = chato y chato = pequeño); pero fracasa por causa de la insuficiencia de los criterios adoptados. En el punto de partida, el niño sólo pensaba, para la clase B, en dos subclases por otra parte heterogéneas: están los objetos que flotan por función o por naturaleza (A_1) y están los "pequeños" (A_2). El sujeto no busca la cualidad común a los primeros objetos y, de los segundos, pensaba que la cualidad "pequeño" arrastra otras propiedades: liviano, etcétera. Ahora bien, a partir de la enumeración de los objetos así reunidos y antes de la experiencia, el niño se vio obligado a especificar (sin orden ni jerarquía) los diversos sentidos alternativos provenientes del concepto "pequeño": liviano, chato y delgado. Además, en un momento dado intervinieron criterios nuevos sin relación alguna con los precedentes: el color y, por último, una cualidad global análoga a la de A_1 pero construida *a posteriori*: la de los objetos que ya permanecieron sobre el agua.

En cuanto a los objetos B', que se hunden, se los encuentra clasificados en tres subclases que corresponden a la inversa de A_1, A_2 y A_3. Sin embargo ni lo chato, ni lo delgado ni el color tienen negativo; recíprocamente dos nuevas subclases (A_8 y A_9) no tienen correspondiente en B.

En definitiva, esta clasificación (representativa de otros ejemplos análogos) presenta los siguientes caracteres: 1) las subclases no son todas disyuntas; 2) no todas tienen una negación; 3) no se dejan agrupar ni por jerarquía simple (inclusiones y complementaridades) ni por jerarquías múltiples (cuadros de doble o triple entrada). Ahora bien, lejos de simplificarle las cosas al niño, la experiencia no hizo sino complicárselas: introdujo *a posteriori* las subclases A_8 y A_9 en la clase B', sin correspondencia en B. Es cierto que "largo" podría oponerse a "pequeño", pero, precisamente, el niño preveía que el alambre de metal flotaría porque era "delgado" (A_5); después resulta que se hunde porque es "largo" (A_8) sin que "largo" sea el contrario de "delgado", puesto que "delgado" derivaba de "pequeño" por especificación.

De este modo la diversificación de las subclases sin jerarquía introduce, tarde o temprano, la contradicción. Incluso se presenta desde el comienzo por el hecho de que las clases interferentes "pequeño" × "liviano" eran consideradas de modo implícito como idénticas o *encajadas* una en la otra, puesto que se carece de diferenciación entre la clasificación por *encajes* simples y el sistema del cuadro de doble entrada. Esta confusión entre las dos clases de clasificación posible se acentúa con cada adjunción, hasta producir una contradicción explícita: lo "largo" hace que algo se hunda

y lo "delgado" que flote y sin embargo el alambre de cobre es a la vez largo y delgado; asimismo lo "pequeño" hace flotar y lo "pesado" hundirse, y sin embargo varios objetos son a la vez pequeños y pesados.

Veamos algunos ejemplos típicos de las contradicciones características de este nivel I B:

Tosc (5;6, el mismo sujeto que el anterior) después de afirmar del tablón: *"Va al fondo.* ¿Por qué? *Porque es pesado"*, añade poco después *"porque es grueso"*. Luego comprueba que el tablón flota y sale de apuro del siguiente modo: *"Es demasiado grueso y además hay demasiada agua* (para tocar el fondo)." Un momento después intenta mantenerlo en el fondo con otro tablón y una bola de madera: los dos vuelven a subir *"porque éste es más grande y volvió a subir.* ¿Y por qué la bola vuelve a subir? *Porque es más pequeña* (!). ¿Y esta tapa? *Volverá a subir.* ¿Por qué? *Porque es más pequeña que este pedazo de madera, que el tablón* (!). Prueba. *Se quedó porque yo apoyé demasiado arriba."*

Bez (5;9) explica la flotación por el peso (a la inversa de Tosc): "¿Por qué estas cosas (clasificadas por Bez) van al fondo? *Son cosas pequeñas.* ¿Por qué las pequeñas van al fondo? *Porque no son pesadas, no nadan por encima porque es demasiado liviano.* ¿Y éstas (clase de los objetos que flotan)? *Porque son pesados, nadan sobre el agua."* Se pasa a la experiencia: la llave se hunde *"porque es demasiado pesada para permanecer encima"*, mientras que la tapa se hunde *"porque es liviana"*. Se comparan dos llaves entre sí: la gruesa no se queda arriba del agua *"porque es demasiado pesada.* ¿Y la pequeña? *También irá al fondo.* ¿Por qué? *Porque es demasiado liviana"*.

Gio (6;0): "¿Estas cosas (clasificadas por él) van al fondo? *Sí, esto* (la bola de madera). ¿Por qué? *Porque es pesada.* ¿Y éstos (la clase de los objetos que flotan)? *Nadan porque son livianos."* Se realiza la experiencia con la tapa: flota *"porque es liviana.* ¿Y si apoyas encima? (se hunde). *Porque es liviana, y cuando algo es liviano nunca se queda arriba.* ¿Y este tablón? *Permanecerá arriba.* ¿Por qué? *Porque es pesado.* ¿Por qué? *Porque es grueso.* ¿Y si apoyas encima? (lo hace). *Vuelve a subir porque es liviano.* ¿Y esto (una aguja gruesa)? *Va al fondo porque es gruesa.* ¿Y esto (placa de metal), si se apoya? *Permanecerá en el fondo.* ¿Por qué? *Porque es liviano"*.

Eli (6;10): "¿Esto (vela)? *Va al fondo.* ¿Por qué? *Porque es redonda.* ¿Y esto (la bola)? *Va encima* ¿Por qué? *Porque también es redonda."* La contradicción no es pues específica del peso. "¿Y esta aguja (colocada sobre el agua)? *Flota porque es liviana.* ¿Y si se apoya encima? *Se irá al fondo.* ¿Por qué? *Porque será pesada."* La contradicción marcha a la par con la no conservación.

Hace tiempo un lógico sostuvo, a propósito de observaciones análogas, que estas afirmaciones no son contradictorias, porque un mismo resultado puede responder a dos causas contrarias: por ejemplo, las personas que pagan pocos impuestos proporcionalmente a su fortuna son o bien muy ricas, o bien no tienen casi nada. Pero los niños de este estadio se

hallan muy alejados de un esquema tan fino y existen tres clases de consideraciones que nos parecen demostrar que permanecen indiferentes ante la contradicción, o más precisamente que no perciben sus continuas contradicciones:

1) En el punto de partida, los sujetos prevén una distribución simple, pero según dos tipos respectivos contrarios (lo que nos revela ya la ambigüedad de las nociones empleadas): los cuerpos que flotan son o los livianos porque son pequeños, o los pesados porque son gruesos. Ahora bien, cada uno de estos dos tipos de explicación contiene ya un conjunto de contradicciones implícitas, ya que lo liviano y lo pesado no coinciden con lo pequeño y lo grueso, y es el peso relativo y no el peso absoluto el que da lugar a la flotación.

2) La experiencia no desengaña al niño, pero intenta conciliarlo todo y adopta entonces alternativamente los dos tipos de explicaciones sin darse cuenta de que son incompatibles entre sí: entonces los cuerpos flotan o se hunden indiferentemente porque son gruesos, pequeños, pesados o livianos (o incluso, por derivación, porque son redondos, largos, etcétera). La contradicción se vuelve entonces explícita, pero no por ello se la percibe mejor que antes, sin duda alguna por causa del equívoco inicial de las cuplas pequeño $\times$ liviano y pesado $\times$ grueso.

3) Estas mismas afirmaciones juzgadas compatibles entre sí por los sujetos del nivel I B parecerán inconciliables a partir del nivel II A: ésta es la mejor prueba de que no son el reflejo de una coherencia implícita, sino el de un pensamiento en estado de desequilibrio porque carece de los instrumentos de coordinación (clasificación operatoria, etcétera), y que se equilibrará solamente a partir del momento en que se constituirán las operaciones concretas.

§ 2. SUBESTADIO II A

El período de 7 a 9 años se caracteriza por un esfuerzo para superar la contradicción principal que el sujeto padecía hasta ese momento sin reaccionar: ciertos objetos gruesos pueden flotar y algunos pequeños pueden hundirse, sin por ello excluir que los livianos flotan y que los pesados no. La contradicción tiende entonces a superarse mediante una revisión de la noción de peso en sus relaciones con la de volumen, lo que equivale a afirmar que el niño comienza a renunciar a la noción absoluta de peso para orientarse hacia la de densidad y, sobre todo, hacia la de peso específico.

Se llama densidad a la relación existente entre el peso de un cierto volumen del cuerpo y del volumen igual de agua y peso específico al peso de 1 cm^3 del cuerpo considerado. Pero tomaremos estas dos nociones en un sentido más elemental: hablaremos de densidad cuando el sujeto relacione de modo explícito el peso y el volumen (por lo tanto cuando la

noción se comprenda como relación), y de peso específico cuando el sujeto comprenda que, a volumen igual, cada materia presenta un peso propio (en este último caso el sujeto ya no se refiere pues explícitamente al volumen). Los niños del nivel II A buscan entonces superar las contradicciones anteriores invocando el peso específico, que comienzan a concebir.

Los dos problemas que presenta este estadio desde el punto de vista de las operaciones lógicas son, pues, los siguientes: 1) Las contradicciones del nivel I, ¿tienden a desaparecer por sí mismas porque el sujeto arriba a la noción de peso específico, o la construye con el fin de superar estas contradicciones? 2) En este segundo caso, ¿cómo llega el niño a percibir las contradicciones con la única ayuda de las operaciones concretas?

Ker (7;6) clasifica entre los objetos que flotan: la madera, los fósforos, los corchos, una tapa y broches de metal, una goma, pequeños clavos y un pequeño cilindro de metal hueco. Los objetos que no flotan son para él: una llave, las piedras, un disco de metal, la aguja y la bola de madera pesada. Después de experimentar, construye una tercera clase: la de los objetos que flotan o se hunden según que estén vacíos o llenos de agua: la tapa y la aguja (cuyo agujero deja pasar al agua si se la hunde). En cuanto a las dos primeras clases, las define por lo "liviano" y lo "pesado", pero se comprueba que Ker vacila entonces entre los dos sentidos posibles de estas nociones: el sentido antiguo o absoluto (los clavos pequeños para lo "liviano" y la bola de madera gruesa para lo "pesado") y el sentido nuevo o relativo, esto es, el peso específico: "¿La piedrita va al fondo? *Sí.* Pero ¿es liviana? *No, es piedra.* ¿Y el clavo? (realiza la experiencia). *Porque es hierro.*"

Bar (7;11) de entrada clasifica a los cuerpos en tres categorías: los que flotan porque son livianos (la madera, los fósforos, el papel y la tapa de aluminio); los que se hunden porque son pesados (llaves grandes y pequeñas, piedritas de todos los tamaños, broches, agujas y clavos, cilindro de metal, goma), y los que se quedan entre dos aguas (peces). "¿La aguja? *Va al fondo porque es hierro.* ¿Y la llave? *También.* ¿Y las cosas pequeñas (clavos, broches)? *También es hierro.* ¿Y esta piedrita? *Es pesada porque es piedra.* ¿Y el clavo pequeño? *Es un poco pesado.* Y la tapa, ¿por qué se queda? *Tiene bordes y se hunde si se llenan de agua.* ¿Por qué? *Porque es hierro.*"

Duf (7;6): "¿Esta bola? *Permanece sobre el agua; es madera: es liviana.* ¿Y esta llave? *Al fondo. Es hierro: es pesado.* ¿Qué es más pesado, la llave o la bola? *La bola.* ¿Por qué la llave va al fondo? *Porque es pesada.* ¿Y entonces el clavo? *Es liviano pero igual va al fondo. Es hierro y el hierro siempre va bajo el agua.*"

El principal carácter de estas reacciones, comparadas con las del nivel I B, reside en un esfuerzo real para superar las contradicciones. El procedimiento empleado en este sentido es un perfeccionamiento de la clasificación, obtenido a partir de las operaciones concretas de encajes. En

efecto, permiten la distinción sistemática entre "todos" y "algunos" gracias a la adición reversible $A + A' = B$ y $B - A' = A$, de donde $A < B$. De este modo apenas el sujeto busca determinar los encajes precisos de la parte en el todo, arriba a este descubrimiento significativo del primer nivel operatorio: los objetos pequeños no siempre tienen un peso inferior a los gruesos, en otros términos, es falso considerar a todos los objetos pequeños como livianos y a todos los gruesos como pesados. En particular, en el caso de la flotación, todos los objetos que flotan no son pequeños y todos los que se hunden no son grandes. El niño logra entonces establecer una clasificación de doble entrada, en lo que concierne al peso y volumen, que da cuatro posibilidades: los pequeños livianos, los pequeños no livianos, los gruesos livianos y los gruesos pesados. Partiendo de estos encajes el sujeto se vuelve entonces sensible a la contradicción: en presencia de estas cuatro subclases existiría contradicción si se identificara entre sí peso y volumen.

De este modo el niño llega a revisar su noción de peso y a oponer al concepto de peso absoluto, esto es del peso igual al volumen o a la cantidad de materia, una nueva concepción: la del peso relativo a la materia considerada, esto es, del peso como cualidad de las materias distintas, lo que constituye un esbozo del peso específico. Sin embargo, insistamos sobre ese punto, no se comprendería de qué modo se efectúa este inicio de reestructuración del concepto de peso, destinado a evitar las contradicciones anteriores, sin el aparato lógico nuevo constituido por las operaciones concretas de clases y relaciones: en efecto, la lectura misma de los datos de la experiencia relativos al peso y la cantidad de materia (grueso) supone la distinción entre la parte y el todo ("todos" y "algunos"), vale decir, una estructura coherente indispensable para evitar las contradicciones en este punto.

No obstante, la noción de peso específico así esbozada sigue siendo insuficiente: sólo es aún una cualidad propia de las diversas variedades de sustancia y no una relación entre el peso y el volumen. La razón de ello es simple: como lo hemos visto en otra parte, el niño de este nivel no está aún capacitado para concebir la conservación del peso ni la del volumen. El único invariante que se halla a su disposición es la cantidad de materia: no puede entonces realizar composición exacta alguna de las relaciones de peso y volumen desde el punto de vista de las relaciones entre los cuerpos o de su configuración interna. Es inútil volver sobre las antiguas experiencias[3] que los resultados presentes confirman totalmente. Limitémonos, pues, a señalar que sin conservación ni composición de las relaciones de peso y volumen, no puede concebirse el peso específico, salvo bajo la forma de una simple cualidad inherente a cada sustancia respectiva.

[3] Véase Piaget e Inhelder, *Le développement des quantités chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé, 1940 (véase caps. I-III y, sobre todo, VIII-IX para la combinación de las relaciones entre el peso y el volumen).

Ahora bien, dado este carácter incompleto de la noción de peso específico, subsistirá naturalmente en este nivel una indiferenciación relativa entre la noción de peso absoluto y la de peso específico; de ahí la presencia de una fuente residual de contradicciones a pesar de la búsqueda visible del niño para superarlas (véase, por ejemplo, cómo Ker concibe la gruesa bola de madera a veces pesada y otras liviana, lo mismo el clavo, etcétera). Y, si oscila entre sus dos concepciones del peso es porque no toma conciencia del todo de su dualidad, por más que se encuentre sobre el camino de su diferenciación. En efecto, para distinguirlas explícitamente tendría que poseer las operaciones que permiten esta distinción. Ahora bien, lo vimos recién, el caso no es tal. Incluso la seriación de los pesos diferentes entre objetos del mismo volumen sólo se adquiere en el nivel II B.[4] La concepción naciente del peso específico no marca, pues, más que el comienzo y no la culminación de la disociación entre peso y volumen: no es más que la expresión del descubrimiento según el cual no todos los objetos pequeños son livianos, ni todos los grandes, pesados, pero permanece en esta etapa de clasificación previa sin llegar aún a una estructuración más profunda.

§ 3. NIVEL II B

Alrededor de los 9 ó 9;6 años, el niño logra la conservación del peso y sabe así desde entonces aplicar al peso las operaciones concretas de seriación, igualación e, incluso hasta cierto punto, medida. En cuanto al peso específico y la densidad ya no se limita a calificar las diversas materias en términos de pesos simples: el hierro es pesado, la madera liviana, etcétera. Introduce un esquema explicativo nuevo: los objetos de alto peso específico son más "llenos" que los otros.[5] Pero como el volumen no proporciona aún la ocasión para la conservación, no se trata todavía aquí del establecimiento de una relación operatoria entre peso y volumen.

Resulta así que en las comparaciones (que comienzan en este estadio) entre el peso de los cuerpos y el del agua, el niño no relaciona el peso del objeto con el del volumen correspondiente de agua sino que lo hace, por lo general, con el peso del agua contenida en el recipiente entero.[6] En este punto, durante este estadio, se observa un nuevo núcleo residual de contradicción. Si varias de las contradicciones del nivel anterior se eliminan mediante los progresos que acabamos de señalar, en cambio, el peso del cuerpo, comparado con el del volumen total del agua, seguirá asimilándose a una fuerza sustancial o a una actividad motora; de ahí que se producirán un conjunto de explicaciones dinámicas contradictorias en-

[4] *Développements des quantités*, pág. 233.
[5] *Développements des quantités*, pág. 173.
[6] Véase Piaget, *La causalité physique chez l'enfant*, pág. 160: un barco que flota sobre el lago sería demasiado pesado para flotar sobre el Ródano, etcétera.

tre sí. Por otra parte, la noción de lo "lleno", a pesar de permitir la unificación de las explicaciones en lo concerniente a las materias homogéneas y plenas, lleva a formular, en el caso de los objetos huecos (barcos, tapas, etcétera), la hipótesis de que estos últimos flotan porque están llenos de aire: ahora bien, esta explicación, sin por ello ser falsa, constituye otra fuente de posibles dificultades.

Veamos algunos ejemplos de estas diferentes reacciones:

Bar (9 años), clase 1: flotan la bola y los pedazos de madera, los corchos y la placa de aluminio. Clase 2: se hunden las llaves, los pesos de metal, las agujas, las piedritas, el bloque grande de madera y el pedazo de cera. Clase 3 (a veces flotan, a veces se hunden): las tapas. Después Bar ve una aguja en el fondo del agua y dice: "*¡Ah! Son demasiado pesadas para el agua, entonces el agua no puede llevarlas.* ¿Y las fichas? *No sé. Más bien al fondo.* ¿Por qué estas cosas (clase 2) van al fondo? *Porque son pesadas* ¿Y el bloque grande de madera? *Irá al fondo.* ¿Por qué? *Hay demasiado poca agua para que pueda sostenerse.* ¿Y las agujas? *Son más livianas.* ¿Y entonces? *Si la madera fuera del mismo grosor que la aguja, sería más liviana.* Coloca la vela sobre el agua. ¿Por qué se queda? *No sé.* ¿Y esta tapa? *Es hierro que no es demasiado pesado y hay bastante agua para llevarla.* ¿Y ahora? (se hunde). *Es porque el agua entró adentro.* Coloca el bloque de madera. *¡Ah! porque es madera que es bastante ancha como para no hundirse.* ¿Y si fuera un cubo? *Creo que se iría al fondo.* ¿Y si se apoya encima? *Creo que volverá.* ¿Y sobre esta placa (aluminio)? *Se quedará en el fondo.* ¿Por qué? *Porque el agua pesa sobre la placa.* Qué es más pesado, ¿la placa o la madera? *El pedazo de madera.* Entonces, ¿por qué la placa se queda en el fondo? *Como es un poco más liviana que la madera cuando hay agua encima hay menos resistencia y puede quedarse. La madera tiene resistencia y vuelve a subir.* ¿Y este pequeño pedazo de madera? *No, volverá a subir porque es aun más liviano que la placa.* Y si volvemos a empezar con este pedazo grueso de madera en el recipiente más pequeño ¿sucederá lo mismo? *No, volverá a subir porque el agua no es bastante fuerte: no hay bastante peso de agua.*"

Bru (9 años): "*El agua no puede llevar a las piedritas. A la madera sí.* ¿Y si se hunde en el agua? *Volverá a subir porque el agua no es lo bastante fuerte: no hay bastante peso de agua* (por lo tanto esta vez para mantenerla en el fondo y ya no para llevarla)." Un momento después afirma: la madera vuelve a subir cuando se la suelta porque "*hace como un resorte*".

El interesante caso de Bar ejemplifica la mayor parte de los caracteres del estadio. En primer lugar, clasifica los objetos en función del peso específico y no del peso absoluto, salvo en tres excepciones: dos casos por ignorancia (cera y aluminio) y uno (el pedazo grueso de madera) porque establece una relación con el volumen total del agua del recipiente. El sujeto incluso logra establecer en un punto una relación explícita entre el peso y el volumen del cuerpo: la aguja es más pesada que el pedazo de madera porque "si la madera fuera del mismo gro-

sor que la aguja, sería más liviana". Entonces, ya que comenzó tan bien ¿por qué el sujeto no encuentra la ley y termina por quedar atrapado en un número creciente de contradicciones? Porque la relación que establece entre peso y volumen no encontró aún una forma operatoria general (multiplicación lógica de volúmenes iguales y pesos diferentes o pesos iguales y volúmenes diferentes) y permaneció limitada al caso particular de la comparación del hierro y la madera. Resulta así que cuando se trató de la relación principal en juego en la ley, esto es, el establecimiento de la relación del peso del cuerpo considerado con el del agua, el niño no compara los pesos de volúmenes iguales (cuerpo y agua), sino que considera el peso del objeto y el del agua en su totalidad: "más pesados que el agua" significa entonces "demasiado pesados para que el agua pueda sostenerlos". Ahora bien, una vez que el sujeto se aventura en esta relación de los pesos como fuentes de fuerzas activas, todas las explicaciones se tornan posibles a medida que se comprueban los hechos y, tarde o temprano, se producen las contradicciones. Todo el fragmento final de la interrogación de Bar (así como los propósitos citados de Bru) lo demuestra hasta un punto tal que Bar vuelve a la explicación mediante el peso absoluto, más fácil de conciliar con sus imaginaciones dinámicas.

Estos esfuerzos iniciales de unificación y no contradicción, pero no coronados con el éxito final, ya que se carece de instrumentos operatorios adecuados, vuelven a encontrarse en los casos más difíciles desde el punto de vista de la unidad de la explicación: para los objetos huecos, con intervención del aire, y para la aguja que flota en ciertos casos por causa de la tensión superficial. Así, algunos sujetos, que explican el peso específico mediante la noción de lo más o menos pleno o lleno, llegan a generalizar el caso de las tapas o de los barcos —que flotan cuando están vacíos (pero sostenidos por el aire) y se hunden cuando se los llena de agua— hasta convertirlo en un prototipo para el peso específico de cualquier objeto:

Ray (9 años): *"La madera no es lo mismo que el hierro. Es más liviana: en ella hay agujeros.* ¿Y el acero? *Permanece en el fondo porque en él no hay agujeros."*

Dum (9;6): La madera flota *"porque tiene aire adentro"*. La llave no *"porque no tiene aire adentro"*.

Sin embargo, la analogía sólo podría ser válida a condición de que los "agujeros" de la madera permanezcan cerrados. De ahí la explicación dada en el caso de las agujas colocadas con cuidado sobre la superficie del agua:

Ray (9 años, el mismo sujeto que antes): *"La aguja pincha y va dentro del agua porque es delgada y pesada.* Mira (la aguja flota). *¡Ah! Pero porque en la otra aguja que se fue al fondo había un agujero.* Pero ésta también tiene un agujero. ¿Y este broche? *Irá al fondo, porque tiene agujeros: el agua entra adentro."*

And. (10 años): *"La aguja flota porque hay un pequeño agujero. ¿Y si es grueso? Se cae.* ¿Cómo saberlo de antemano? *Depende de si es grueso o pequeño. Si no hay agua que suba encima, se queda."*

En definitiva, este nivel II B marca pues un gran progreso en la dirección de la no contradicción y en la búsqueda de una explicación única fundada en los comienzos del establecimiento de la relación entre peso y volumen que supone el esquema de lo más o menos "lleno". Pero, como el volumen de agua considerado no es el del agua desplazada sino el agua contenida en el recipiente total, se sigue concibiendo a la relación entre el peso del cuerpo y el peso del agua como una relación entre fuerzas activas, hecho que vuelve a introducir una complejidad fértil en contradicciones. La probabilidad de que éstas se produzcan aumenta con la intervención del aire y la función que desempeñan los agujeros, abiertos o cerrados. En resumen, a falta de relaciones operatorias suficientes para dominar el conjunto de las relaciones entre peso y volumen, no se llega aún a la explicación ya presentida, ni se logra todavía la coherencia del sistema.

§ 4. ESTADIO III

Hemos insistido un poco extensamente sobre los niveles preoperatorios y los estadios operatorios concretos con el doble objetivo de mostrar el largo camino que debe recorrer el pensamiento antes de buscar una explicación no contradictoria y única, y para ilustrar por qué la realización de un modelo explicativo semejante sólo puede obtenerse con la ayuda de las operaciones formales, incluso para el presente caso en que la ley buscada puede expresarse por medio de operaciones simplemente concretas. Ahora debemos intentar analizar esta intervención necesaria de las operaciones formales en el descubrimiento de la ley. Pero, desde este punto de vista, la situación es un poco más compleja que para el caso de la ley de los ángulos estudiada en el capítulo anterior. En este primer ejemplo, en efecto, las correspondencias entre las inclinaciones encontradas en los niveles II A y II B la proporcionaban, como primera aproximación, una expresión casi correcta de la ley: sólo que al sujeto se le escapaba todavía la razón de estas correspondencias, y el pensamiento formal no introducía más que un elemento de implicación necesaria en el seno de relaciones ya exactas de por sí. Por el contrario, en el ejemplo actual la ley no se descubre en su totalidad en el nivel II B y el pensamiento formal es indispensable para la realización acabada de su construcción. Esta diferencia puede responder a dos razones.

En primer lugar, aun cuando una vez hallada la relación de las densidades puede expresarse bajo una forma simplemente concreta, no obstante la elaboración de las nociones en juego requiere un esquematismo

[1] En efecto el concepto de densidad supone el de volumen. Ahor

bien, hemos comprobado antes que la conservación del volumen sólo se constituía en los comienzos del nivel formal, vale decir, alrededor de los 11-12 años: [7] sin duda alguna la explicación de esto reside en el hecho de que, al revés que en el caso de las formas simples de conservación que el sujeto domina mediante simples compensaciones aditivas, la conservación de un volumen en el curso de sus cambios de forma supone la intervención de las proporciones.[8] Ahora bien, veremos, durante los capítulos XI-XIV de esta obra, por qué la noción de proporción sólo aparece en el nivel formal, en conexión con ciertas propiedades generales de las estructuras de grupos, características de las operaciones proposicionales.

Pero, en segundo lugar, las operaciones formales son sobre todo necesarias, en el caso de la ley de la flotación, para permitir a la vez la exclusión de las interpretaciones demasiado simples del estadio II y la imaginación de una hipótesis que no corresponda a ninguno de los datos concretos directamente observables. En efecto, las explicaciones del estadio II no son absurdas y ni siquiera son inmediatamente contrarias a los hechos: para excluirlas, es necesario pues ante todo sentir la insuficiencia de su coherencia y ello sólo puede ser el resultado de un pensamiento que sepa deducir necesariamente las consecuencias de simples hipótesis. Por otra parte, relacionar el peso del cuerpo considerado con el peso de un volumen igual de agua, implica concebir una situación que no corresponde a nada en la observación concreta: la que remite al volumen total del agua del recipiente, mientras que la consideración de un volumen de agua igual al del objeto comparado es el producto de una disociación más fina que requiere nuevamente la intervención del pensamiento hipotético-deductivo.

Sin duda alguna, los sujetos que vamos a examinar ahora son tanto más aptos para utilizar conocimientos adquiridos en la medida en que se aproximan al nivel escolar durante el cual se abordan estas cuestiones. Sin embargo, puede detectarse de entrada, mediante la interrogación, cuándo esta adquisición no corresponde a las estructuras mentales indispensables para su asimilación; dejaremos de lado los casos que se hallan influidos de este modo prematuramente. Por otra parte, vimos (§ 3) de qué manera el sujeto Bar, a los 9 años, ya compara volúmenes iguales de madera y hierro: la generalización de esta operación mental que permite su extensión al agua se realiza de modo tan natural, durante el estadio III, que resulta difícil no admitir una parte de espontaneidad en esta estructuración progresiva, aun cuando el ambiente social la acelere. Veamos algunos ejemplos que comienzan con la presentación de dos casos intermedios:

[7] *Le développement des quantités chez l'enfant*, cap. III y *La géométrie spontanée de l'enfant*, cap. XIV.

[8] Si las tres dimensiones de un volumen, x, y y z se transforman en x', y' y z' hay conservación cuando $xy/x'y' = z'/z$, que se extrae de $xyz = x'y'z'$. De este modo existen compensaciones multiplicativas y por lo tanto proporciones.

Fran (12;1) no logra descubrir la ley, pero no acepta tampoco ninguna de las hipótesis anteriores. Clasifica correctamente a los objetos presentados, pero duda en el caso del alambre de aluminio. "¿Por qué dudas? *Porque es liviano, pero no, no importa.* ¿Por qué? *No importa que sea liviano. Depende de la materia: por ejemplo la madera puede ser pesada y sin embargo flota.*" Y en el caso de la tapa: "*Pensaba en la superficie.* ¿La superficie desempeña algún papel? *Tal vez, la superficie que toca el agua, pero no quiere decir nada.*" De este modo descarta todas las hipótesis pero sin encontrar solución.

Fis (12;6) también caso intermedio entre los estadios II y III, se acerca más a la solución cuando afirma en el caso de una moneda que se hunde "*porque es pequeña, no está bastante extendida* (détendue). *Sería necesario que fuera algo más grande para permanecer en la superficie, algo del mismo peso y que tuviera más extensión* (d'étendue)".

Ala (11;9): "¿Por qué dices que esta llave va a hundirse? *Porque es más pesada que el agua.* ¿Esta pequeña llave es más pesada que esta agua (se muestra el recipiente)? *Quiere decir que la misma capacidad de agua sería menos pesada que la llave.* ¿Cómo es eso? *Se podrían colocar* (metal o agua) *en recipientes que contuvieran la misma cantidad y balancearlos.*"

Jim (12;8) clasifica a los objetos que flotan o se hunden según que sean "*más livianos o más pesados que el agua*"; por ejemplo un pequeño clavo se hunde porque es "*más pesado que el agua.* ¿Qué quieres decir? *Será necesario mucho más agua que metal para tener el mismo peso.* ¿Y esta tapa? *Cuando se colocan los bordes hacia arriba, hay aire adentro; si se ponen los bordes hacia abajo, desciende porque el agua entra adentro y se hace más pesada.* ¿Por qué flota la madera? *Porque es liviana.* ¿Y esta pequeña llave? *Porque es más pesada.* Este gran pedazo de madera ¿es más liviano que esta pequeña llave? *No, este pedazo de madera es más pesado.* ¿Y entonces? *Si se mide con una llave* (es decir, con el peso de una llave), *será necesaria más madera que plomo para el peso de la llave.* ¿Qué quieres decir? *Si se toma metal, será necesaria mucho más madera para tener el mismo peso que el metal.*"

Mal (12;2): "*La plata es pesada, por eso se hunde.* ¿Y si tomas un árbol? *El árbol es mucho más pesado, pero es de madera. El agua es más liviana que la plata y no es más liviana que la madera.* ¿La plata es más pesada que esta agua (del recipiente)? *No, se toma la cantidad de agua del tamaño del objeto: se toma la misma cantidad de agua.* ¿Me lo puedes probar? *Sí, con esta botella de agua. Si se tuviera la misma cantidad de corcho, flotaría porque el corcho es menos pesado que la misma cantidad de agua.*" Y además: "*Una botella llena de agua se va al fondo, si está llena, porque está totalmente llena, sin aire y esta botella se queda en la superficie si se la llena sólo por la mitad.*"

Se ve, de qué modo, al rechazar toda relación entre el peso de los objetos considerados y el del agua total contenida en el recipiente, estos sujetos llegan a comparar el primer peso con el del volumen equivalente

de agua: Fran comienza por atribuir un papel eventual a la superficie de contacto, Fis imagina que una pieza de metal flotaría si, sin aumentar su peso, aumentase su "extensión" (*étendue*), luego Ala, Jim y Mal llegan a razonar sobre la "capacidad de agua" o la "cantidad de agua" iguales al volumen del objeto: "Se toma la cantidad de agua del tamaño del objeto", dice por ejemplo Mal. De este modo, el esquema de lo más o menos pleno o "lleno", utilizado en el nivel II B, se transforma en el establecimiento de una relación entre el peso y el volumen propio (en el caso de Fis lo *"détendu"* se transforma en la relación del peso y de lo *"étendue"*) y, por último, entre el peso y volumen del objeto considerado con el peso y volumen correspondiente del agua desplazada por el objeto.

Estos hechos plantean entonces tres problemas correlativos: I) ¿de qué modo son descartadas de entrada las hipótesis admitidas hasta entonces?; II) ¿de qué modo se las arregla el sujeto para construir la hipótesis nueva?, y III) ¿cómo logra verificarla?

I) Acerca del primer punto, es interesante señalar que el sujeto descarta a partir de entonces sin verificación las hipótesis demasiado primitivas, mientras que verificará cada vez más las hipótesis superiores. Incluso casi descarta las primeras sin razonamiento explícito, como cuando Fran afirma que "no importa", o que "no quiere decir nada". En otros términos, le basta, para refutar una explicación, invocar verbal o mentalmente un caso en que el factor supuesto se halla asociado al efecto contrario. De este modo, Fran elimina el peso absoluto cuando dice "por ejemplo la madera puede ser pesada y sin embargo flota". Asimismo Ala y Mal descartan toda comparación con el volumen total del agua del recipiente porque saben que las variaciones de este volumen no modifican el fenómeno de la flotación o no flotación de los cuerpos considerados. La novedad, en relación con el estadio II, en este caso de la flotación como en el de la igualdad de los ángulos estudiada en el capítulo I, reside en el hecho de que el sujeto, en vez de tomar simplemente conciencia de las relaciones dadas para extraer correspondencias o clasificaciones, se coloca de entrada desde el punto de vista de todas las combinaciones posibles, de tal modo que pueda extraer sus implicaciones o no implicaciones. Hemos visto, en el capítulo I, cómo la implicación se sustituía a la simple correspondencia y volveremos a encontrar la implicación al instante a propósito de la construcción de la nueva hipótesis propia de este estadio. Ahora bien, la eliminación de las hipótesis juzgadas insuficientes se hace de las tres maneras siguientes, que suponen todas la no implicación.

En primer lugar, si llamamos p a la afirmación de la flotación y q a la de un factor cualquiera asociado con p, por ejemplo, lo liviano (absoluto), el sujeto puede contentarse con la comprobación de la existencia de la asociación $p\,\bar{q}$ para descartar al factor q (por ejemplo, el bloque

grueso de madera es pesado y flota). Conocemos, en efecto, que $p\,\bar{q}$ es la negación de la implicación $p \supset q$:

1) $p \cdot \bar{q} = \overline{p \supset q}$

En segundo lugar, el sujeto puede tomar conciencia de las dos posibilidades reunidas $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$, esto es, de p $(q \vee \bar{q})$ lo que constituye la operación llamada la afirmación de p independientemente de la verdad o la falsedad de q. Ahora bien, esta operación contiene $p \cdot \bar{q}$ y ella también equivale pues a descartar $p \supset q$. Así lo dice Fran por ejemplo cuando declara que: "la madera puede ser pesada (o liviana) y sin embargo flota" o sea:

2) $p \cdot (q \vee \bar{q}) = (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$

Por último el sujeto puede no retener un factor porque sabe que todas las combinaciones posibles son verdaderas. Por ejemplo si p es la afirmación de la flotación y q la de una gran cantidad de agua en el recipiente, los sujetos del presente nivel ya no atribuyen importancia a la comprobación q porque saben bien que se puede observar la existencia de las cuatro combinaciones: $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ según que un objeto flote sobre mucha o poca agua o que otro se hunda en las dos mismas situaciones. Ahora bien, esta operación de cuatro conjunciones que se llama "tautología" o "afirmación completa" contiene de nuevo la no implicación $(p \cdot \bar{q})$.

3) $(p \star q) = (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

II) En cuanto a saber cómo llega el niño a formular la hipótesis propia del nivel III, por la cual "más liviano (o más pesado) que el agua" significa "volúmenes iguales", la cosa se explica en función de lo que antecede, en lo que concierne a las nociones como a las operaciones.

En lo que ataña a las nociones, el niño del nivel II ya sabe que un cuerpo puede ser más pesado que otro de volumen igual (véase Bar a propósito de la madera y el metal de la aguja), pero cree que el peso del cuerpo considerado debe compararse con el volumen total del agua del recipiente. En cambio el niño del nivel III rechaza esta última hipótesis: sólo le queda entonces relacionar el peso de este cuerpo con el de una cantidad de agua —ya no cualquier cantidad— pero de nuevo igual al volumen del cuerpo mismo. Dicho en otros términos, el descubrimiento propio del nivel III no es más que la generalización del modo de comparación esbozado en el nivel II para dos cuerpos sólidos y aplicado, a partir de entonces, tanto al agua como al objeto juzgado más pesado o más liviano que ella. Resulta claro de por sí que la comparación entre un sólido y el agua es más difícil que la comparación entre dos sólidos, puesto que el volumen de agua igual al del sólido inmerso en ella no tiene contornos visibles y es el resultado de una abstracción previa. Pero,

no por ello deja de constituir el punto final de toda la construcción anterior referida a los pesos relativos o específicos.

Desde el punto de vista de las operaciones, esta comparación, con igualación de un volumen imaginado hipotéticamente, se emparenta entonces con los razonamientos de los que hallaremos muchos ejemplos a continuación y que consisten en considerar la variación de un único factor "permaneciendo igual todo lo demás". Si designamos con p a la afirmación de que un objeto dado flota y con $\bar{p}$ la afirmación de que no flota, con q la afirmación de su igualdad de volumen con una cierta cantidad de agua, con r la afirmación de que es más liviano que esta cantidad de agua y con $\bar{r}$ la afirmación de que es más pesado, entonces la relación establecida por el sujeto equivale en efecto a lo siguiente:

4) $p \cdot q \cdot r \vee \bar{p} \cdot q \cdot \bar{r}$

lo que constituye el esquema de las demostraciones fundadas sobre el "permaneciendo igual todo lo demás". Ahora bien, esta expresión equivale al producto de las dos operaciones $(p \underset{C}{\supset} r)$ y $(q \cdot r) \vee (q \cdot \bar{r})$, esto es, de la implicación recíproca (o equivalencia) entre la flotación del cuerpo y su peso (relativo al mismo volumen de agua) y la afirmación de la independencia entre el peso y el volumen. En esta operación $(q \cdot r) \vee (q \cdot \bar{r})$ se reconoce además la operación $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q})$ o sea aquella (2) mediante la que el sujeto establece la no intervención causal de un factor.

Así, la explicación hallada en el nivel III abarca ahora todos los casos posibles, incluido el de los objetos huecos, sin que sea necesario recurrir a las fuerzas contrarias del agua y el aire ni al papel de los agujeros, pequeños o grandes. En el caso en que el peso del cuerpo iguala al del agua (con el mismo volumen) se tiene por supuesto (si $p_0 =$ ni flotar ni hundirse y $r_0 =$ ni más pesado ni más liviano que el agua):

4 bis) $p_0 \cdot q \cdot r_0 \vee \bar{p}_0 \cdot q \cdot \bar{r}_0$

Por ejemplo *Ray* (12;7) dice acerca de un cubo de plástico muy delgado (y de densidad sensiblemente igual a la del agua) que, si se lo llenase de agua *"se quedaría en el medio, en el líquido, porque el peso es el mismo"*.

Después de los intentos múltiples de unificación, durante todo el estadio II, se produce entonces por fin la unicidad de la explicación y no contradicción, ya que se suprimen las dos fuentes principales de contradicciones anteriores (el peso absoluto y las fuerzas activas) mediante la hipótesis única de la densidad o de la relación del peso con el volumen.

III) El examen de los procedimientos de verificación empleados por los sujetos confirma plenamente lo que precede y permite, en particular,

controlar el hecho de que los razonamientos del sujeto no consisten ya en simples establecimientos de relaciones o correspondencias concretas, sino que suponen necesariamente la combinatoria formal. Mientras que en el nivel preoperatorio I, el sujeto no es capaz de ninguna prueba, en el nivel de las operaciones concretas (II A y, sobre todo, II B) no experimenta espontáneamente su necesidad, pero, si se le solicita puede proporcionarla. Sólo que, de acuerdo con toda la lógica de las operaciones concretas —que simplemente consiste en organizar la lectura de la experiencia bruta (por clasificaciones, establecimientos de relaciones, etcétera)—, la única verificación que concibe entonces consiste en acumular hechos, hasta lograr una certeza más o menos completa, pero sin superar lo general, es decir, sin introducir vínculos de necesidad por disociación de estos hechos y deducción de las relaciones así disociadas:

Bon (11;0) quiere probar que *"todos los objetos de madera flotan"*. Coloca entonces dos sobre el agua (el cubo de madera y la bola): *"Lo único que tengo que hacer es poner las dos cosas en el recipiente. Las dos flotan: todos los objetos de madera flotan."*

Pero, ¿qué vale el pasaje del "algunos" casos singulares al "todos", que nos recuerda la inducción *por extensión* que la lógica clásica quería convertir en un simple razonamiento? A falta de razonamiento probabilístico (excluido del nivel II B) no es más que una extrapolación sin valor, ya que $p \cdot q \supset (p \supset q)$ da $(p \supset q) \vee (p \cdot \bar{q})$; por lo tanto $p \cdot q \supset (p \star q)$, esto es, "algunos objetos de madera flotan" implica cualquier cosa.

En el nivel del pensamiento formal (a partir del estadio III A), por el contrario, la prueba consiste en demostrar la verdad o falsedad de una afirmación especial o general teniendo en cuenta (o buscando tener en cuenta) el conjunto de las combinaciones posibles, lo que permite entonces agrupar estas combinaciones de modo demostrativo: ahora bien, agrupar estas combinaciones equivale precisamente a elegir los casos en los que varía un solo factor, mientras que se mantienen constantes los demás, de tal modo que se pueden disociar las relaciones generales de las simples conjunciones contingentes, y, sobre todo, se pueden combinar entre sí de modo necesario. Esta combinación vuelve entonces indispensable recurrir a lo que hemos llamado, en el capítulo I, el "conjunto de las partes" (las combinaciones de 0, 1, 2, 3 y 4 conjunciones) en oposición con los simples encajes aditivos y multiplicativos (es decir, con los "algunos" y los "todos") característicos de las operaciones concretas.

En otros términos, los procedimientos de verificación, propios del estadio III, hacen intervenir de modo explícito el esquema "permaneciendo igual todo lo demás" con el que comparamos, hace un momento, la hipótesis explicativa concebida por el sujeto (prop. 4). Pero, conviene aún señalar dos observaciones, una desde el punto de vista de la diferencia que existe entre los niveles III A y III B y la otra desde el punto de

vista de las relaciones entre el presente problema y aquellos que trataremos en los capítulos siguientes.

Por regla general, y bajo su forma auténtica, el esquema "permaneciendo igual todo lo demás" sólo aparece en el nivel III B; ya lo veremos un poco más adelante a propósito de la flexibilidad: es que entonces se trata de, dados *n* factores A, B, C, D, ... independientes entre sí, hacer variar A dejando invariables B, C, D, etcétera. En el caso presente, por el contrario, los dos factores peso y volumen no son independientes en el mismo sentido, ya que el sujeto busca determinar su relación y vincularlos con una noción nueva: la de densidad. Resulta entonces más fácil, para comparar un cuerpo con el agua sobre la que flota, hacer variar el peso dejando constante el volumen que, para estudiar el papel del peso, pensar en mantener invariantes factores independientes cualesquiera (temperatura, presión, etcétera). Por esto el esquema "permaneciendo igual todo lo demás", bajo la forma elemental que reviste en este problema aparece ya en el nivel III A:

Ger (12;7) para probar que la moneda tiene una densidad superior al agua: *"Si hubiera un frasco lleno de agua y otro igual lleno de cuatro monedas... (éste sería) más pesado e iría al fondo del lago."*

Al (12;8): *"Con el mismo volumen, el agua es más liviana que esta llave."* Para probarlo: *"tomaría plastilina y modelaría exactamente el contorno de esta llave y pondría agua adentro: tendría el mismo volumen de agua que la llave... y será más liviano."*

Pero no es menos cierto que en el nivel III B este esquema adquiere su valor general: en efecto, en lo que concierne a la presente cuestión, sólo alrededor de los 13-14 años conduce hacia la búsqueda de una unidad métrica común. Entre los objetos que constituyen nuestro material se encuentran entre otros un cubo de madera, un cubo de hierro y un cubo vacío de plástico (de densidad cercana a 1), los tres del mismo volumen. Ahora bien, es sorprendente ver que los sujetos del nivel III B recurren, tarde o temprano, a estas unidades, y son los únicos que recurren a ellas de modo espontáneo:

Lamb (13;3) clasifica correctamente a los objetos que se hunden: *"Sentí más o menos que eran más pesados que el agua. Comparé con el mismo peso, no con el mismo volumen de agua.* ¿Puedes darme una prueba? *Sí, tomo estas dos botellas, las peso... ¡Ah!* (en este momento ve los cubos) *peso este cubo de plástico con agua adentro y comparo este volumen de agua con el cubo de madera. Es necesario siempre comparar un volumen con el mismo volumen de agua.* ¿Y con esta bola de madera? *No puedo calcular.* Pero ¿y de algún otro modo? *Ah sí, se marca el nivel de agua* (en el recipiente); *se coloca allí la bola y se saca el agua que marca la diferencia con el nivel de antes.* Entonces ¿qué es lo que comparas? *El peso del agua que hay entre los dos niveles y el peso de la bola."*

Wur (14;4): *"Tomo un cubo de madera y este cubo de plástico que lleno con agua: los peso y se ve la diferencia sobre la balanza según que un objeto sea más pesado o más liviano que el agua."*

Se observa que el factor dejado invariante, así como la unidad común buscada, corresponden siempre al orden del volumen, mientras que en principio se podría también decir que a pesos iguales de agua y del cuerpo considerado, éste flota si tiene un mayor volumen (véase el caso de Fis y su moneda que flotaría si fuese más extensa (*étendue*). Pero la verificación experimental sería más difícil.

De modo general, la verificación propia del nivel III consiste en disociar los factores según combinaciones no dadas en la observación directa y componer las relaciones de este modo disociadas según operaciones de conjunciones e implicaciones como las de la proposición (4). Es en este sentido, en el presente problema como en el de la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión, como la ley buscada supone al fin de cuentas una elaboración formal por más que una larga estructuración concreta prepare su descubrimiento. Sin embargo, sin duda alguna, las combinaciones posibles son, en ambos casos, demasiado pocas para que el papel de las operaciones formales se oponga, de modo suficiente, al de las operaciones concretas y, sobre todo, para que el esquema "permaneciendo igual todo lo demás" adquiera toda su generalidad. Conviene entonces ahora pasar al análisis de problemas más complejos.

CAPITULO III

LA FLEXIBILIDAD Y LAS OPERACIONES

que intervienen en la disociación de los factores [1]

La flexibilidad de una varilla depende de su materia, longitud, espesor, forma de sección y, en condiciones iguales, sus inclinaciones varían en función del peso que se coloca en su extremidad. Nos pareció pues interesante, para estudiar los razonamientos que intervienen en la disociación de los factores y en la verificación de sus papeles respectivos, colocar a nuestros sujetos en presencia de esta problemática, que, si bien no presenta nada complicado en cuanto a la naturaleza de las nociones en juego, implica una dificultad de orden experimental por cierto superior a la de los problemas anteriores. En efecto, acabamos de entrever, a propósito de la flotación de los cuerpos, la importancia que presenta para el pensamiento hipotético-deductivo, el esquema "permaneciendo igual todo lo demás", es decir, el método que consiste en hacer variar un solo factor por vez, mientras que los demás se mantienen constantes. Ahora bien, la interferencia de cinco factores distintos, en el caso de la flexibilidad, constituye una situación particularmente propicia para el estudio de la formación de este esquema experimental y las operaciones formales que supone.[2]

[1] Con la colaboración de A. M. Weil y de J. Rutschmann.

[2] La técnica de la experiencia es la siguiente. El sujeto dispone de un gran recipiente de agua, un juego de varillas que difieren en cuanto a sus cualidades (acero, metal blando, etcétera), su longitud, su grosor y su forma de sección (redonda, cuadrada, rectangular). En la extremidad de las varillas se pueden atornillar tres muñequitos de pesos diferentes. Por otra parte, las varillas pueden fijarse sobre el borde del recipiente en una posición horizontal, y los muñequitos ejercen entonces una presión perpendicular a la superficie del agua. Simplemente le pedimos al sujeto que experimente hasta que la extremidad de cada una de las varillas toque el nivel del agua. Se observan los métodos que emplean los sujetos, se anota lo que ellos dicen acerca de los factores de flexibilidad que invocan o se les pide, por último, la prueba de sus afirmaciones.

§ 1. ESTADIO I

Para comprender de qué modo las operaciones formales completarán en el nivel III a las operaciones concretas, es necesario establecer previamente lo que éstas proporcionan y, para ello, hay que describir, en primer lugar, las reacciones del nivel preoperatorio I (hasta alrededor de los 7 años). Ahora bien, estas últimas reacciones son simples: como explicación el niño se limita a describir lo que ve, y como no dispone aún, para comprobar los hechos, ni de clasificaciones ni de seriaciones organizadas, completa lo observado con relaciones precausales (finalismo, animismo, causalidad moral, etcétera):

Ric (5;0) coloca 200 gramos sobre la barra de acero cuadrada de 40 cm: "*No toca el agua* (las varillas que deben compararse representan 'puentes' móviles fijados a un tablón que representa una 'ruta' y en la extremidad de estos puentes se colocan muñequitos, o bien 'pescadores', los cuales tocan el nivel del agua si los 'puentes' se inclinan suficientemente)." Coloca luego la barra de metal blando redonda de 7 mm², que en cambio toca el agua. "¿Por qué? *Porque es más baja.*" La barra de acero redonda de 22 cm de largo y 16 mm²: "¿Por qué no toca el agua? *Porque la barra es demasiado alta.* ¿Por qué se queda demasiado arriba? *Porque está sobre un tablón* (esto es, porque está fija a un tablón, ¡pero todas ellas lo están!). ¿Pero por qué con ésta (metal blando) y no con ésta? *Porque es demasiado pequeña* (demasiado corta). ¿Y por qué no funcionaba con la primera (40 cm)? *No funcionaba porque hay madera* (El tablón donde está fija)... *en la segunda también hay madera. Vamos a empezar de nuevo* (vuelve a empezar). *No, no funciona.* ¿Entonces? *Porque es más pesada y baja en el agua.* ¿Y ésta (nueva varilla)? *No funciona porque está demasiado arriba...*", etcétera.

Huc (5;5) después de diversos intentos coloca 100 gramos sobre una varilla y espera como si fuera a descender de un momento a otro. "¿Por qué las varillas no bajan todas de la misma manera? *Porque el peso debe ir al agua.*" Luego coloca 200 gramos sobre una varilla gruesa y 100 gramos sobre una fina: "¿Cuál es la que se inclina más? *Esta* (la fina). ¿Por qué? *El peso es más grueso aquí* (muestra 200 gramos sobre la otra), *ésta debe ir al agua.* (Se colocan 200 gramos sobre la varilla fina que entonces toca el agua. El niño se ríe.) ¿Por qué tocó el agua ahora? *Porque tiene que ser así.*"

Vemos que estos sujetos se limitan, por lo general, a una simple lectura de lo que perciben: la varilla no toca el agua porque permanece demasiado alta, o toca el agua porque desciende más abajo, etcétera. Se le añade la intervención de un finalismo, causalidad moral ("tiene que ser"), etcétera. También aparece un comienzo de establecimiento de relaciones que presenta un cierto interés lógico en el sentido de que el niño se contenta con encajes demasiado amplios, sin especificación. En efecto, así como después de utilizar las definiciones según el uso correspondiente

al finalismo y a la causalidad moral de las explicaciones primitivas, el niño define por el género, pero sin la diferencia específica (una mamá es "una señora", sin referencia a sus hijos), así, en el nivel inmediatamente superior al de las explicaciones precausales (estos sujetos sólo manifiestan residuos de ellas) aparecen relaciones objetivas, pero según inclusiones igualmente genéricas y no específicas. De este modo Ric declara que una cierta barra no toca el agua porque se halla fijada al tablón y sin embargo las que tocan el agua también lo están.[3] Un momento después retoma la misma explicación: "porque está la madera (es decir el tablón)", pero añade de modo espontáneo "en la segunda también está la madera". Huc, por su parte, para explicar que una barra fina se dobla mejor que una gruesa se limita a observar que el peso más pesado está colocado sobre la que se dobla menos, de tal modo que ambas "deberían" (en el sentido moral más que lógico) ir al agua; y en cuanto a saber por qué no se doblan todas del mismo modo, se limita también a invocar la razón general "porque el peso debe ir al agua". Vemos que un largo camino separa aún esta clase de inclusión exclusivamente genérica, porque es anterior a las operaciones concretas diferenciadas, de la implicación de naturaleza formal que resultará de los encajes propios de estas operaciones.

§ 2. ESTADIO II A

Con la aparición de las operaciones concretas de clases y relaciones, se vuelve posible la lectura de la experiencia bruta gracias a clasificaciones, seriaciones y correspondencias coherentes y diferenciadas, pero ello no basta en absoluto para asegurar la disociación de los factores, es decir, para asegurar la organización de una experiencia verdadera:

Mor (7;10), después de colocar al muñequito sobre una varilla fina que toca el agua, afirma: "*Con ésta* (gruesa) *no caerá de la misma manera porque la otra es más delgada.*" Enseguida cambia de muñequito: *"Este es menos pesado que el otro"*, coloca al muñequito pesado sobre una varilla corta y al liviano sobre una varilla larga, previendo que la curva se doblará más *"porque el otro muñequito es más liviano que éste"*. Como la experiencia no confirma esta previsión, alarga la varilla corta: *"¡Ah! con la gruesa había que hacer así"*, etcétera. Se le solicita al sujeto que resuma lo que encontró basta el momento y que forme series con las varillas según su orden de flexibilidad: ¿Cuál se dobla más? *Esta, porque es más delgada.* ¿Y luego? *Esta* (larga y fina, de metal). ¿Y después? *Esta* (corta de madera). ¿Y después? *Esta* (más gruesa); *va con el hombrecito* (pesado). ¿Y luego? *Esta* (gruesa y de metal); *no iba al agua porque había que hacer esto* (alargarla)."

[3] Véase Piaget, *Le jugement moral chez l'enfant*, pág. 292: el sujeto Schma (6;6) piensa que un pequeño mentiroso se cayó al agua porque mintió pero que, si no hubiera mentido, igual se hubiera caído "porque el puente estaba viejo".

Bau (9;2): "*Hay varillas que se inclinan más que otras porque son más livianas* (muestra la más delgada) *y las otras son más pesadas.* Demuéstrame que una liviana se dobla más que una pesada (se le da una varilla corta y gruesa, una larga y delgada y una corta y fina). (Coloca 200 gramos sobre la larga y fina y 200 gramos sobre la corta y gruesa, sin tomar en cuenta el hecho de que la varilla fina que elige es también la más larga.) *Ya está.* Muéstrame que la larga se dobla más que la corta. (Coloca de nuevo 200 gramos sobre las dos mismas varillas y se supone que el resultado probará esta vez el papel de la longitud.) Si yo quito la larga, ¿puedes todavía comparar para saber si la más liviana se dobla más? *Sí, ésta y ésta* (las dos cortas, una gruesa y la otra fina). ¿Qué es más correcto, comparar estas dos o bien comparar como hiciste antes? *Estas* (larga y fina, corta y gruesa). ¿Por qué? *Son más diferentes.*"

Estos dos casos bastan para mostrarnos a la vez los progresos realizados en comparación con el nivel I y la incapacidad de los sujetos que pertenecen al subestadio II A para disociar los factores en juego.

Los progresos en relación con el nivel I consisten, como de costumbre, en que el sujeto se vuelve capaz de realizar una lectura sistemática de la experiencia bruta, esto es, de los hechos tal como se presentan a la observación sin provocárselos con el fin de verificar una hipótesis o disociar los factores. Esta lectura es sistemática, porque en vez de simples establecimientos de relaciones globales (como los encajes genéricos sin especificación propios del nivel I) el sujeto puede hacer clasificaciones diferenciadas, seriaciones o igualaciones, correspondencias, etcétera, que, consideradas cada una de modo aislado, son todas exactas. Por ejemplo, Mor logra comparar longitudes, grosores, pesos, etcétera, sobre el modo de la seriación, e incluso llega a establecer un encadenamiento serial de 5 varillas desde el punto de vista de las inclinaciones que observó. Ahora bien, cada una de estas operaciones es correcta, incluida la última que es la más complicada, pero su conjunto no prueba nada cuando se libra al niño a su propia iniciativa. Cuando el experimentador elige dos términos de comparación desde el punto de vista de un cierto factor, permaneciendo todo lo demás igual, la operación de comparación que realiza el niño parece entonces significativa. Pero cuando el sujeto depende sólo de sí mismo, todo se mezcla: así la serie de las 5 inclinaciones que construye Mor como un resumen de lo que observó por su propia cuenta constituye una mezcla de todos los factores, de tal modo que de ella nada puede deducirse. Asimismo Bau, para probar el papel de lo delgado (que, por otra parte, confunde con el peso) compara dos varillas, una de ellas es en efecto la más delgada, pero también es la más larga; después elige los mismos elementos para probar el papel de la longitud y, cuando se intenta estimularlo para que disocie estos dos factores, responde que más vale comparar los términos que son más diferentes entre sí.

Vemos, de modo claro, a propósito de estos casos, en qué consiste la diferencia entre las operaciones formales, que harán posible la disociación de los factores gracias a una combinatoria indispensable para este efecto, y las operaciones concretas necesarias para la lectura de los hechos, pero insuficiente para organizar la experiencia en vista a esta disociación. El problema que entonces se plantea es comprender el porqué de esta insuficiencia. Antes de buscar resolverlo, examinemos aún las reacciones del nivel II B, que añadirán los esquemas multiplicativos explícitos a las operaciones empleadas en el subestadio II A, que no recurren todavía más que a multiplicaciones lógicas implícitas (Bau sabe que su varilla es "más diferente" porque es "a la vez" más delgada y más larga, pero no lo dice y procede por simples adiciones de relaciones).

§ 3. SUBESTADIO II B

La única novedad propia del nivel II B es la realización acabada de las multiplicaciones entre relaciones asimétricas. Mientras que los sujetos del nivel II A sólo utilizan la multiplicación lógica en la forma elemental de las correspondencias biunívocas, los del subestadio II B utilizan el esquema de los cuadros de doble entrada con seriaciones orientadas en sentidos diferentes [4] así como agrupamientos counívocos (varias relaciones para un mismo resultado):

Ot (9;3) comienza por invocar la longitud: "*Se entiende, porque la barra es más larga: puede descender mejor.* ¿Y si colocamos dos barras de la misma longitud (se le entrega una fina y una gruesa)? *Desciende más rápidamente allí porque es más fina que la otra, que es gruesa y ésta no.*" Luego comprueba la influencia del peso, y prevé, en el caso de una varilla corta: "*Ya no funcionará: la barra es demasiado corta y el muñequito es demasiado liviano para la barra.*"

Hae (10;9) descubre el papel de la materia, del grosor y de la longitud: "¿Puedes, sin experimentar, decirme si se tocará el agua con esta varilla? *Podría, pero si la hacemos retroceder* (solamente) *un poco: es del mismo metal que ésta, pero es más gruesa, entonces habrá que hacerla retroceder menos que la otra.*" Por lo tanto (A igual metal que B) × (más grueso) × (más largo) = (igual inclinación). Existe además una comprensión de la compensación entre dos relaciones de sentidos contrarios: (menos delgada) × (más larga) = (más delgada) × (menos larga).

Este último ejemplo da testimonio a la vez de la presencia de cuadros de doble o triple entrada (condición de la multiplicación de las relaciones asimétricas transitivas, con o sin compensaciones) y de la multipli-

[4] Consúltese acerca de los ejes de coordenadas para el espacio, que también aparecen alrededor de los 9-10 años (véase *La représentation de l'espace chez l'enfant*, caps. XIII-XIV).

cación counívoca (varias causas posibles para un mismo efecto). El sujeto Ot sabe también multiplicar lógicamente las relaciones de peso y longitud, etcétera.

Ahora bien, los sujetos de este nivel no por ello se hallan capacitados para verificar la acción de un factor dejando invariantes a todos los otros factores conocidos. Asimismo, si llegan a comprender de qué modo la longitud y el grosor pueden compensarse, en el caso de tratarse de una misma materia, no saben generalizar esta noción de compensación a todos los factores conocidos. Se trata pues de comprender el porqué de estas limitaciones. Ello resulta tanto más difícil en la medida en que el sujeto parece poseer todos los instrumentos operatorios que le permitirían hacer estos razonamientos. Por ejemplo Ot comprende muy bien que, de dos barras de la misma longitud, la más fina se dobla más; sin embargo, cuando se trata de poner de manifiesto la función del factor grosor, compara barras desigualmente delgadas sin modificar de modo equivalente los otros factores, y ni sospecha que su verificación no demuestra nada. Hae no actúa mejor a pesar del descubrimiento de una compensación posible entre dos factores particulares. Todo sucede pues como si se estuviera en presencia de dos sistemas diferentes de pensamiento, uno concreto que permite simplemente la composición de las relaciones y clases según los hechos dados y otro formal que permite la reconstitución de las relaciones necesarias.

El sistema concreto consiste en tablas de asociaciones o correspondencia, o bien de clases, o bien de relaciones. Expresemos todo esto en un lenguaje de clases para simplificar. Llamemos A_1 la clase de las varillas que tienen 50 mm de largo y A'_1 las de las varillas < 50 mm; A_2 será la clase de los pesos de 300 g y A'_2 la de los pesos < 300 g; A_3 será la clase de las varillas de metal blando y A'_3 la de las varillas que no son de metal blando, etcétera. Por último X será la clase de las varillas que tocan el agua y X' la de las varillas que no se doblan lo suficiente como para llegar a ella. Recordemos además que la reunión de dos clases A y A' da la clase total B.

Tenemos entonces, para dos parejas de clases (un solo factor y su resultado X o X') el siguiente cuadro de doble entrada:

$$1)\ (B_1) \times (X + X') = A_1X + A_1X' + A'_1X + A'_1X'$$

Para dos factores y su resultado tenemos 8 combinaciones (cuadro de triple entrada):

$$2)\ (B_1) \times (B_2) \times (X + X') = A_1 A_2 X + A_1 A_2 X' + A_1 A'_2 X + A_1 A'_2 X' + A'_1 A_2 X + A'_1 A_2 X' + A'_1 A'_2 X + A'_1 A'_2 X'$$

Para 3 factores y sus resultados, tendremos asimismo 16 combinaciones, para 4 factores 32 combinaciones y, por último, para 5 factores y sus resultados X o X' existen 64 combinaciones. Estas 64 combinaciones,

dadas en su totalidad o en parte en el curso de las experiencias, son las que ejecuta el niño más o menos empíricamente (según su nivel) y que le permiten establecer las correspondencias entre las variaciones de los factores y los resultados X o X' (las combinaciones, de hecho, son más, puesto que los factores longitud, grosor, peso e inclinación dan lugar a más variaciones que A o A' y que la clase A'_3 de las varillas que son de metal blando es a su vez subdividida).

Una primera cuestión es la de saber si el sujeto del nivel II B es capaz de construir estos cuadros. En lo que concierne a uno o dos factores, parece verosímil que sí, puesto que los razonamientos citados se apoyan sobre tales estructuras y que sabemos qué facilidad tienen los sujetos entre los 7-10 años para constituir correspondencias seriales. En el caso de 3 ó 5 factores pueden proceder por adjunciones sucesivas de elementos nuevos (doblando cada vez el cuadro anterior), pero resulta claro que no sería posible un cálculo completo, ni, por otra parte, necesario, mientras el sujeto opere por correspondencias graduales (*de proche en proche*).

Ante un solo factor y su resultado X o X', por lo general le bastará al niño una correspondencia inmediata para establecer la relación entre A_1 y X: si se tiene $A_1X + A'_1X'$ y que las combinaciones A'_1X y A'_1X' son nulas (es decir no dadas en la observación porque son inexistentes), resulta claro que el sujeto deducirá la acción de A_1 sobre X. Pero, si se dan las cuatro combinaciones o las 3 combinaciones $A_1X + A'_1X + A'_1X'$, el método de la correspondencia simple entre A_1 y X (o entre sus negaciones) ya no bastará y será necesario formular la hipótesis de la acción de un segundo factor en el caso A'_1X (esto es, un factor que produce a X por otras causas que no sean A_1). Ahora bien, el sujeto, en efecto, sabe hacerlo en los casos fáciles (cuando la delgadez compensa la longitud, etcétera), pero lo sabe cada vez menos sistemáticamente a medida que el número de los factores aumenta y que el experimentador no simplifica las cosas en sus sucesivas presentaciones al niño. Dicho en otros términos, el sujeto del estadio de las operaciones concretas (II A y II B) sabe leer correctamente la experiencia bajo la forma de correspondencias diversas, lo que equivale a construir de modo implícito un cuadro cada vez más complejo de las asociaciones dadas (positivas y negativas). Pero no sabe interpretar el cuadro, salvo cuando las correspondencias inmediatas son suficientes y no sabe disociar los factores cuando están demasiado mezclados.

Porque para disociar los factores, es indispensable hacerlos variar uno por uno manteniendo constantes los demás ("permaneciendo igual todo lo demás"). Entonces ya no basta considerar el cuadro en su conjunto, en el que se dan todas las correspondencias simultáneamente: se trata de analizar las asociaciones A_1X, etcétera, situación por situación, para ver cuáles están relacionadas entre sí y cuáles se excluyen. Pero, para lograr este análisis, se debe recurrir a una combinatoria completa, que ya no requiere únicamente la construcción del cuadro de las asociaciones, como los cuadros (1) con sus 4 asociaciones o (2) con sus 8 asociacio-

nes: esta combinatoria completa equivale a considerar las asociaciones una a una, dos a dos, etcétera, que constituyen 16 combinaciones que deben extraerse del cuadro (1) o 256 combinaciones del cuadro (2). Dicho en otros términos, mientras los cuadros (1) y (2) constituyen conjuntos simples, compuestos de 4 u 8 partes (o asociaciones) reunidas, la combinatoria necesaria para el análisis de las relaciones se apoya sobre el llamado "conjunto de las partes", que se compone entonces de 16 combinaciones en el caso (1) y de 256 en el caso (2).

Ahora bien, ya hemos visto, durante los capítulos I y II que esta combinatoria completa es precisamente lo que caracteriza el pensamiento formal, cuya estructura supera los agrupamientos aditivos o multiplicativos de clases y relaciones (con sus simples inferencias concretas fundadas sobre la transitividad de los encajes de clases o los encadenamientos de relaciones) y engendra la constitución de una lógica de las proposiciones. En efecto, para dos proposiciones p y q, las 16 operaciones posibles (conjunción, disyunción, implicación, incompatibilidad, etcétera) corresponden exactamente a estas 16 combinaciones que pueden obtenerse a partir del cuadro (1) y para tres proposiciones p, q y r, las 256 operaciones posibles (por otra parte reductibles todas a composiciones de operaciones binarias) corresponden a las 256 combinaciones que pueden obtenerse del cuadro (2).

En otros términos, si los sujetos del nivel II B no llegan todavía a disociar los factores, sino simplemente a establecer las correspondencias dadas en la experiencia inmediata, es porque no son capaces de realizar esta combinatoria que constituye la lógica de las proposiciones: resulta entonces que, por una parte, no saben combinar las situaciones experimentales de modo tal que de entre las relaciones posibles se manifiesten las relaciones reales; y, por la otra, no saben razonar mediante implicaciones, etcétera, como para componer, de modo necesario y demostrativo, los diversos datos experimentales que observan. Ahora bien, estas dos clases de lagunas en realidad sólo constituyen una, puesto que es la misma combinatoria la que le permitirá a los sujetos del nivel III imaginar las experiencias que conducen a la disociación de los factores y deducir, por medio de las operaciones entre proposiciones, las consecuencias de estas experiencias.

Resulta conveniente señalar, en efecto, que por carecer de esta lógica de las proposiciones los razonamientos constitutivos de la prueba permanecen inaccesibles en los niveles II A y B. El razonamiento concreto consiste en lo siguiente: si se tiene $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$ (donde $\rightarrow$ puede ser una inclusión, una igualdad o una relación asimétrica transitiva) debe concluirse $A \rightarrow C$. Este tipo de inferencias se encuentra en las reacciones de Hae y de Ot. Pero esta utilización de las transitividades no constituye una operación entre proposiciones, como lo es una implicación: simplemente equivale a componer entre sí clases o relaciones según un cierto orden de encajes y encadenamientos. En cambio las operaciones proposicionales consistirán en combinar entre sí, de todos los

modos posibles, las diversas asociaciones de base que caracterizan las clases multiplicativas: por ejemplo, la implicación equivaldrá a extraer de la combinación $A_1X + A'_1X + A'_1X'$ esta afirmación: $p \supset q$ (si $p =$ a la afirmación de A_1 y $q =$ a la de X), ya que si sólo se tiene $(p \cdot q)$ v $(\bar{p} \cdot q)$ v $(\bar{p} \cdot \bar{q})$, y nunca $p \cdot \bar{q}$ (que corresponde a A_1X') entonces q es siempre verdadera cuando p es verdadera. Son nuevas combinaciones que, como lo veremos ahora, van a caracterizar el pensamiento propio de los sujetos del nivel III y engendrarán al mismo tiempo la capacidad deductiva del razonamiento demostrativo y la capacidad experimental de la disociación de los factores en juego según sus modos de acción respectivos.

§ 4. NIVEL III A

Este nivel se caracteriza por los comienzos del pensamiento formal que se reconocen por la aparición de un razonamiento hipotético-deductivo al mismo tiempo que por una búsqueda activa de verificación, pero sin que el sujeto se halle de entrada en posesión del juego completo de las operaciones entre proposiciones. Resulta que, si se asiste a la génesis de la implicación, la exclusión, etcétera, el niño no es aún capaz de organizar una prueba sistemática conforme al esquema "permaneciendo igual todo lo demás" salvo en ciertos casos y no para el conjunto de los factores en juego:

Pey (12;9) supone que, para que se doble la barra hasta el agua, es necesario que sea "*larga y delgada*". Después de varios ensayos, concluye: "*Cuanto más gruesa y espesa es, más resiste.* ¿Qué observaste? *Esta* (metal blando, cuadrada, 50 cm de largo, 16 mm² de sección y 300 g) *se dobla más que ésta* (acero; las otras condiciones las eligió iguales): *es otro metal. Y ésta* (metal blando, redonda) *más que aquélla* (metal blando, cuadrada; iguales condiciones respecto del peso y la longitud, pero 10 y 16 mm² de sección respectivamente). ¿Si quisieras comparar una varilla que se doble lo más posible? *La buscaría redonda, delgada, larga y de metal blando.*"

Aule (12;10) quiere probar que una varilla larga se dobla más que una corta; toma dos barras de acero, una redonda de 22 cm y la otra cuadrada de 50 cm, pero, al darse cuenta de que la forma de sección no es la misma, ajusta ambas hasta tener 22 cm de longitud: "*Esta* (redonda) *se dobla más porque es delgada* (tienen el mismo grosor, pero una es redonda y la otra cuadrada). ¿Qué probó usted? *Creo que no probé nada. ¡Ah! sí, que las redondas se doblan más que las cuadradas.*"

Dur (11;10): "*Hay unas chatas, otras más gruesas y otras más delgadas, unas más largas. Si son largas y delgadas al mismo tiempo, se doblarán aún más.* ¿Podría usted mostrarme que una varilla fina se dobla más que una gruesa? (Coloca 100 g sobre la varilla de acero, redonda, de 50 cm de largo y 16 mm² de

sección y 200 g sobre la de acero, redonda, de 50 cm de largo y 16 mm² de sección.) *Esta se dobla más* (10 mm² de sección). Me gustaría que me mostrara solamente que la fina se dobla más que la gruesa. ¿Es realmente así? (Quita el peso de 100 g y coloca 200 g sobre la de 16 mm².) *Ya está, ahora está bien.*"

Kra (14;1): "¿Puede mostrarme que una gruesa se dobla menos que una delgada? (Coloca 200 g sobre la varilla de acero redonda de 50 cm de largo y 10 mm² de sección; y 200 g sobre la varilla de metal blando cuadrada, de 50 cm de largo y 16 mm² de sección.) *Esta* (acero, delgada) *desciende más.* ¿Por qué? *Es redonda, más flexible, el acero es menos pesado, es redonda y más delgada.* Bien, pero me gustaría una prueba más rigurosa que me mostrara que es así porque es más delgada. (Coloca 200 g sobre la varilla de acero, redonda, de 50 cm y 16 mm² y 200 g sobre la varilla de acero redonda, de 50 cm y 10 mm².) *Ya está, ésta se dobla más porque es menos gruesa.* Muy bien. ¿Podría hacer lo mismo con otras? *Sí* (acero, cuadrada, 50 cm y 16 mm² en el lugar de la varilla de acero redonda de 16 mm²: la comparación, por lo tanto, ya no es correcta). *Esta* (delgada y redonda) *se dobla más, es menos pesada.* ¿Y podría probar la función de la forma? (Coloca 200 g sobre la varilla de metal blando rectangular de 50 cm, y 16 mm² y 200 g sobre la de acero, redonda, de 50 cm de largo y 16 mm² de sección.) ¿Por qué ésta (acero, redonda) se dobla más? *Porque es redonda.* ¿Unicamente por eso? *El metal blando es también más pesado* (quita entonces de modo espontáneo la varilla de acero y toma una varilla de metal blando, cuadrada de 50 cm y 16 mm²)."

La actitud mental característica de este nivel III es pues esencialmente nueva en relación con la que caracteriza las operaciones concretas: el sujeto ya no se contenta con lo real dado en estado bruto, sino que lo comprende de entrada como un sector realizado de un dominio más amplio: el de lo posible. En efecto, los sujetos del estadio II se limitaban a registrar los datos sucesivos según todas las relaciones y clases que respondían a su diversidad, pero sin disociar los factores, y, por lo tanto, sin elaborar hipótesis ni pruebas. Los sujetos del nivel III A, por el contrario, desde el comienzo conciben lo real como un producto de diversos factores que se componen entre sí según un conjunto de combinaciones posibles. De ahí la aparición de dos conductas que hasta entonces carecían de significación: la hipótesis que consiste en reconstituir estas combinaciones y la prueba que equivale a establecer cuáles de ellas se conforman en efecto con la experiencia.

Sin duda, las reacciones iniciales de cada uno de los sujetos precedentes parecen no diferir de las del estadio II: lectura de los datos mediante establecimientos de relaciones y clasificaciones. Pero, mientras que el niño del nivel II acepta todo así como viene, mezclado, y cree de este modo llegar a lo real mismo, el del nivel III sólo utiliza estas descripciones concretas previas como una materia para formular hipótesis y realizar pruebas: de ahí la aparición inmediata de una actitud más activa.

De hecho, estas novedades quedan señaladas por la elección de las varillas que han de compararse, esto es, por la tendencia a compararlas

sólo desde un punto de vista que responda a una cuestión delimitada. Mientras el sujeto del nivel II compara cualquier varilla con cualquier otra y se limita a enunciar las relaciones más aparentes, el sujeto del nivel III comprende que, para aislar una relación determinada, es importante elegir ciertas parejas de varillas en vez de otras. Esta elección, que constituye la reacción nueva que más fácil se observa en el estadio III, permite, precisamente poner de manifiesto las operaciones lógicas utilizadas.

De estas operaciones, la principal, o por lo menos la que orienta casi siempre, en su punto de partida, el análisis de los sujetos, es la operación formal de implicación, mediante la cual el niño supone que un factor determinado arrastra siempre la consecuencia observada. En el nivel II, esta relación causal se establecía por simple correspondencia: cuanto más larga es la varilla, por ejemplo, más flexible es. En efecto, la implicación parte, ella también, de la comprobación de esta correspondencia (la conjunción $p \cdot q$ que traduce AX). Pero añade dos novedades y la reunión de estas tres clases de comprobaciones es la que define la operación de implicación. A la asociación entre un factor A y su resultado X se añade al comienzo el hecho de que el sujeto, que busca disociar los factores, intenta más o menos sistemáticamente (incluso si no lo logra en un sistema completo antes del ingreso en el nivel III B) establecer lo que se produce en caso de supresión o disminución del factor A: comprueba entonces, en ciertos casos, que el efecto X es el mismo suprimido o disminuido (de ahí la asociación $A'X$) y, en algunos otros, que el efecto se conserva porque puede ser el resultado de factores extraños a A (asociación $A'X$). La reunión $AX + A'X + A'X'$ (o en proposiciones: $(p \cdot q)$ v $(\bar{p} \cdot q)$ v $(\bar{p} \cdot \bar{q})$ constituye así un sistema de interpretación más amplio que la simple correspondencia AX porque se refiere a la vez a tres posibilidades (o AX, o $A'X$, o $A'X'$) y porque puede así relacionar en uno solo todos los resultados de varios agrupamientos diferentes de clases y relaciones.

Tenemos aquí un primer ejemplo de esta combinatoria que atañe al "conjunto de las partes", de la que hablamos en el parágrafo anterior: en el caso particular, las partes (o asociaciones) que están vinculadas son tres: AX, $A'X$ y $A'X'$, mientras que se hallan vinculadas de otro modo en los casos de la disyunción o de la incompatibilidad. Además, la capacidad combinatoria que aparece así no se manifiesta sólo por la aparición de tal o cual operación, sino por su sistema como tal, esto es, por el conjunto de las 16 operaciones binarias y por la posibilidad de vincular un número determinado de ellas de modo tal que se engendren las operaciones de orden superior.

Ahora bien, la formación y utilización de este sistema total se manifiestan a través del desarrollo de la prueba en los niveles III A y III B y, sobre todo, a través del esquema "permaneciendo igual todo lo demás", que supone un juego de implicaciones distintas vinculadas con otras operaciones. A partir del nivel III A, se observa una búsqueda de la demos-

tración orientada en este sentido, pero también se comprueba la dificultad de esta realización y el hecho de que los sujetos permanecen a mitad de camino de su realización acabada. Por ejemplo Pey, para probar la influencia del metal, compara barras de metal blando y acero manteniendo constantes todos los otros factores; pero, para probar la influencia del grosor, compara varillas de 10 y 16 mm² de sección con formas de sección desiguales (redonda y cuadrada), sin sospechar que se trata de dos factores distintos. Del mismo modo, Dur hace variar al mismo tiempo el grosor y los pesos antes de corregirse e igualar estos últimos. Aparece pues la búsqueda de una igualdad de las condiciones de comparación, pero existe todavía una dificultad para realizar este proyecto. Para captar mejor las operaciones necesarias para este esquema, y su dependencia respecto del sistema combinatorio total que acabamos de recordar, comparemos en primer lugar las reacciones de este nivel III A con las del nivel II B, momento en que la prueba se vuelve rigurosa en las situaciones aquí estudiadas.

§ 5. NIVEL III B

Bastará citar un interesante ejemplo:

Dei (16;10): "Dígame en primer lugar (después de ensayar) qué factores intervienen. *El peso, la materia, la longitud de la varilla, quizá la forma.* ¿Puede usted probarlo? (Ella compara entonces los dos pesos de 200 y 300 g sobre la misma varilla de acero.) *Ya está: la función del peso del muñequito está probada. Para la materia, no sé.* Tome éstas de acero y éstas de metal blando. *Creo que debo tomar dos varillas de la misma forma. Entonces, para probar la función del metal comparo estas dos* (acero y metal blando, cuadradas de 50 cm de largo y 16 mm² de sección, con 300 g sobre cada una) *o estas dos* (acero y metal blando, redondas de 50 y 22 cm y 16 mm²): *para la longitud, acortaré ésta* (50 cm convertidos en 22 cm). *Para* (probar la función de) *la forma, comparo estas dos* (metal blando, redonda y metal blando, cuadrada de 50 cm cada una y 16 mm²). ¿Podría probar lo mismo con estas dos (metal blando, redonda y cuadrada, 50 cm de largo y 16 y 7 mm² de sección)? *No, porque ésta* (7 mm²) *es mucho más delgada.* ¿Y el grosor? *Comparo estas dos* (metal blando, redondas, 50 cm de largo con 16 y 7 mm² de sección)."

Se trata entonces de comprender de qué modo el sujeto llega a un método tan sistemático, cuya simplicidad aparente no podría engañar puesto que es necesario esperar los 15-16 años para que se organice de modo espontáneo y para que el sujeto lo utilice sin cometer errores.

Si nos referimos a la proposición (2) del § 3, que da las 8 asociaciones de base posibles para dos factores y su resultado X o X', debemos, en primer lugar, admitir que el sujeto comienza por establecer los hechos, como en el nivel II, mediante operaciones concretas de clasifica-

ciones y correspondencias. Por ejemplo, obtendrá para el factor B_2 (peso) y el factor B_3 (metal), el siguiente cuadro de observaciones:

A_2A_3X 300 g, metal blando, inclinación X (máxima).
A_2A_3X' 300 g, metal blando, inclinación X' (porque su longitud es demasiado corta, etcétera).
$A_2A'_3X$ 300 g, acero, inclinación X (suficientemente delgado, etc.).
$A_2A'_3X'$ 300 g, acero, inclinación X'.
A'_2A_3X 200 g, metal blando, inclinación X (suficientemente largo o delgado, etcétera).
A'_2A_3X' 200 g, metal blando, inclinación X'.
$A'_2A'_3X$ 200 g, acero, inclinación X (longitud suficiente, etcétera).
$A'_2A'_3X'$ 200 g, acero, inclinación X'.

Estas observaciones le mostrarán pues de entrada que los factores A_2 y A_3 no son los únicos que están en juego, puesto que la misma combinación A_2A_3 a veces da X y a veces X': en realidad, este cuadro se extrae del cuadro de las 64 asociaciones que corresponden a las observaciones posibles del sujeto. Ahora bien, la novedad característica del estadio III es la siguiente: el sujeto, al haber establecido esta situación compleja por medio de las operaciones concretas, no considera estos conjuntos de hechos como una conclusión de la cual bastará que se extraigan tales o cuales relaciones y correspondencias, sino que pensará en ellos como punto de partida para obtener nuevas combinaciones de tal modo que, al asociar 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, etcétera, cada una de estas 8 asociaciones de base, pueda extraer de ellas un conjunto de operaciones nuevas que correspondan al "conjunto de las partes" de los cuadros iniciales. Estas operaciones nuevas son las que permiten entonces la disociación de los factores, gracias a un juego de implicaciones combinadas con simples conjunciones.

Para poder comprender este fenómeno llamemos p; q; r; s y t a las proposiciones que afirman respectivamente la presencia de los factores A_1; A_2; A_3; A_4 y A_5 y $\bar{p}$; $\bar{q}$; $\bar{r}$; $\bar{s}$ y $\bar{t}$ a las proposiciones que la niegan, y designemos con x y $\bar{x}$ a las proposiciones que afirman respectivamente los resultados X y X'. El esquema de la verificación "permaneciendo igual todo lo demás" consiste entonces simplemente en variar uno de los factores que corresponden a p o q etcétera, y mantener constantes los restantes. Por ejemplo, para A_1, que corresponde a p, se tendrá:

$$3)\ (p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot \bar{x})$$

lo cual equivale a afirmar que, para dos varillas que soportan 300 g ($= q$) de metal blando ($= r$), delgadas ($= s$), y de formas de sección redondas ($= t$), basta acortar suficientemente la longitud inicial de 50 cm (p transformado en $\bar{p}$) para modificar el resultado (x transformado en $\bar{x}$).

Comprobamos así que Pey (§ 4) para poner de manifiesto el factor metal $(= q)$ compara dos barras de tal modo que $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r \cdot s \cdot t \cdot \bar{x})$: en este caso la equivalencia $(q \cdot x) \vee (\bar{q} \cdot \bar{x})$ adquiere un valor demostrativo porque las otras proposiciones $(p \cdot r \cdot s \cdot t)$ permanecen constantes; se eligen $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r \cdot s \cdot t \cdot \bar{x})$ del conjunto de las otras posibles. Ahora bien, esta elección supone la comprensión del hecho de que, si las proposiciones $(p \cdot r \cdot s \cdot t)$ no se mantienen constantes (por lo tanto si los hechos que expresan no se conservan invariantes), el efecto x podría ser el resultado de otra causa distinta de q: la equivalencia (implicación recíproca) $(q \cdot x) \vee (\bar{q} \cdot \bar{x})$ se obtiene pues en realidad a partir de una implicación $(q \cdot x) \vee (\bar{q} \cdot x) \vee (\bar{q} \cdot \bar{x})$ y, en consecuencia, es solidaria con todas las implicaciones concebidas como posibles entre p, q, r, s, t y x. En efecto, mantener inmodificados 4 factores sobre 5, implica suponer que cada uno por su cuenta puede dar lugar a las mismas combinaciones. Por ello, la verificación fundada sobre el esquema "permaneciendo igual todo lo demás" es tan compleja y supone en realidad toda la combinatoria entre proposiciones.

Constituye una prueba de ello el hecho de que, en el nivel III A, este modo de demostración sólo es comprendido en parte. El mismo sujeto Pey, que acabamos de citar, razona luego sin rigor para verificar la función de la forma de sección redonda $(= t)$ o cuadrada $(= \bar{t})$: hace variar al mismo tiempo t en $\bar{t}$ y el grosor $(= s)$, vale decir que plantea entonces $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot r \cdot \bar{s} \cdot \bar{t} \cdot \bar{x})$: resulta claro que no puede deducirse nada de $(s \cdot t \cdot x) \vee (\bar{s} \cdot \bar{t} \cdot \bar{x})$ para la sola función t. Este tipo de error vuelve a encontrarse durante todo el subestadio III A, mientras que en el nivel III B la prueba es rigurosa: por ejemplo, el sujeto Dei aplica por turno el mismo esquema (3) a todos los factores que distingue entre sí y sin cometer error. Dicho de otro modo, la combinatoria formal fundada sobre el "conjunto de las partes" (en oposición con las multiplicaciones biunívocas que proporcionan sus asociaciones de base) comienza a construirse a partir del subestadio III A pero sólo se acaba en el nivel III B.

§ 6. LAS IGUALDADES POR COMPENSACION DE FACTORES

La misma investigación muestra otra adquisición que parece específica del nivel formal (III A y B): la capacidad de determinar cualitativamente ciertas compensaciones entre relaciones heterogéneas. Ya hemos comprobado, en el nivel II B, la existencia de ciertos cálculos lógicos de compensación que se apoyan sobre la multiplicación de las relaciones concretas. De este modo, Hae (10 años) descubre que una barra del mismo metal que otra pero más gruesa puede dar la misma inclinación con la condición de que se la alargue. En este caso, la compensación se ex-

plica por las operaciones siguientes; si se designa con $\underset{\rightarrow}{F}$ el pasaje de lo menos fino a lo más fino y con $\underset{\rightarrow}{L}$ el pasaje de lo menos largo a lo más largo, y con $\underset{\leftarrow}{F}$ y $\underset{\leftarrow}{L}$ los pasajes inversos, se tiene:

$$4)\ \underset{\rightarrow}{F} \times \underset{\leftarrow}{L} = \underset{\leftarrow}{F} \times \underset{\rightarrow}{L}$$

Pero la comprensión de esta compensación por multiplicación de relaciones inversas se vuelve fácil porque se trata de relaciones homogéneas: en efecto, el grosor y la longitud son dos dimensiones espaciales y, como actúan en sentidos contrarios, es fácil multiplicarlas entre sí en dos modos inversos para obtener el mismo producto. Ya lo observamos antes a propósito de la conservación de las cantidades: [5] un recipiente más elevado y menos ancho contiene la misma cantidad de agua que un recipiente menos elevado y más ancho porque el aumento de lo ancho compensa la pérdida de lo alto. Por más que intervengan de hecho, en ambos casos, tres dimensiones, dos distintas entre sí y una operación de multiplicación lógica, la operación en juego es de orden más aditivo que multiplicativo: ante todo, se trata de la impresión de que es posible desplazar en el sentido de la longitud ciertas partes del objeto tomadas en el orden del grosor y viceversa; de ahí la igualación de los productos relativos.

Examinemos ahora los tres casos siguientes de compensación:

1) A longitudes iguales, una barra de acero redonda y fina presenta la misma flexibilidad que una barra de metal blando y más gruesa;

2) A longitudes iguales, una barra redonda y fina de metal blando presenta la misma flexibilidad que una barra chata de metal blando de superficie de sección más grande;

3) A longitudes iguales, una barra redonda y gruesa de acero presenta la misma flexibilidad que una barra de acero cuadrada y menos gruesa.

Se le muestran al niño estas parejas de barras y se le pide simplemente que explique la igualdad de las inclinaciones para los mismos pesos. Ahora bien, estas tres cuestiones sólo se resuelven en el nivel formal, la cuestión (1) en III A y las cuestiones (2) y (3) en III B, con una dificultad máxima en el caso de (3). ¿Por qué sucede así?

En el caso (1) la delgadez de una barra compensa la menor flexibilidad del acero. Ahora bien, como estos dos factores son heterogéneos, para multiplicar entre sí las relaciones concretas en juego, es necesario antes disociar uno de otro los factores en juego y, al mismo tiempo, hacerlos actuar concurrentemente. Vemos entonces la analogía existente entre esta doble exigencia y el esquema de verificación "si todo lo demás

[5] Véase Piaget y Szeminska, *La genèse du nombre chez l'enfant*, cap. I.

permanece igual". En efecto, en ambos casos, hay que anular la acción de uno de los factores para determinar la del otro, y, en ambos casos, hay que limitarse a mantener constante (en la experiencia o en el pensamiento) el factor que se anula, y de este modo se anula no su acción sino las variaciones posibles de esta acción. Ahora bien, en el nivel concreto, las correspondencias entre los metales de las barras y sus inclinaciones, o entre el grosor de las barras y sus inclinaciones se establecen en estado bruto, por una simple lectura de los datos en situaciones diversas sin igualación de los otros factores. Resulta entonces que, en presencia de una compensación precisa como la del problema (1), los sujetos del nivel II no pueden asegurarse de que la diferencia que corresponde a los metales se compense con una diferencia que sólo corresponda al grosor: por el contrario, al ver que las longitudes e inclinaciones son las mismas, tenderán a pensar que el factor metal (o tal vez el grosor) no tienen la importancia que tendían a otorgarle antes. Sólo en el nivel en que los factores se disocian realmente al mismo tiempo que permanecen solidarios entre sí, por lo tanto, en el nivel en que la implicación reemplaza la simple correspondencia concreta, el sujeto, aun cuando no sepa determinar la influencia cuantitativa de cada factor, logra concebir ante una equivalencia de hecho que dos factores pueden compensarse exactamente. Porque ante esta equivalencia, y como los factores están disociados en el pensamiento, el razonamiento se aplica a las variaciones posibles en estado puro y ya no solamente a las variaciones reales y mezcladas: de ahí la compensación deducida de modo formal ("si fuera... debería"), allí donde la compensación por correspondencias o multiplicaciones concretas sigue siendo insuficiente.

Sucede lo mismo para los problemas (2) y (3), pero como las compensaciones se producen entre la forma y el grosor sin que las formas sean las mismas, entonces el grosor (superficie de sección) ya no es dado por la percepción, sino que debe suponérselo a título de posibilidad hipotética. De ahí la mayor dificultad de estos últimos problemas en los que debe deducirse casi todo, en particular en el caso (3) en el que la superficie de sección es muy difícil de apreciar.

En cuanto a las operaciones intelectuales que intervienen en la comprensión de estas compensaciones, se trata, además de las implicaciones, de una especie de proporción cuyo mayor interés es el de constituir un puro esquema cualitativo o lógico, a falta de todo dato métrico o numérico. El punto de partida es una doble implicación (que escribimos para los enunciados p y q de dos factores cualesquiera, aclarado que en el caso del metal y el grosor, se trata de r y de s, o que para el grosor y la superficie de sección, se trata de s y t, etcétera):

$$5)\ p \cdot \bar{q} \supset x \quad y \quad \bar{p} \cdot q \supset x \quad \text{ó} \quad x \supset (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$$

Esta doble implicación significa que la presencia del factor enunciado por p, junto con la ausencia (o con el debilitamiento) del factor

enunciado por q da el mismo resultado (enunciado por x) que la ausencia (o el debilitamiento) del factor enunciado por p y la presencia del enunciado por q.

La situación es entonces la siguiente: 1) las conjunciones $(p \cdot \overline{q})$ y $(\overline{p} \cdot q)$ que, por sí solas, expresarían la exclusión recíproca entre p y q (o sea $p \vee\!\vee q = p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q$) conducen, en este caso, a la misma consecuencia x; 2) son por lo tanto, no solamente recíprocas, sino que los factores enunciados por p y q pueden sustituirse entre sí y cada uno conduce al mismo resultado. De lo que resulta, entonces la noción de una cierta proporción lógica por reciprocidad (R), que es por otra parte general para $(p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q)$, pero que aquí sirve de esquema a la compensación misma, por el hecho de que la reciprocidad adquiere en este caso la significación de una acción de valor igual pero orientada en sentido contrario (debilitamiento o reforzamiento):

$$6) \quad \frac{\overline{p}}{q} = R \frac{p}{\overline{q}}$$

Esta expresión significa (según que se la lea en diagonal, vertical u horizontalmente: a) que $\overline{p} \cdot \overline{q} = R\,(p \cdot q)$; b) que $\overline{p} \vee \overline{q} = R\,(p \vee q)$; c) que $\overline{p} \cdot q = R\,(p \cdot \overline{q})$ y d) que $\overline{p} \cdot p = R\,(q \cdot \overline{q})$ ya que $o = R_o$.

Ya volveremos a encontrar otros ejemplos de estas proporcionalidades lógicas, ya sea independientes de todos datos métricos, o bien anteriores a su determinación numérica. Por el momento, observemos que ya no sólo se trata de un razonamiento proposicional, sino además de una estructuración formal de las nociones, tema que constituirá la segunda parte de esta obra.

CAPITULO IV

LAS OSCILACIONES DEL PENDULO[1] Y LAS OPERACIONES DE EXCLUSION

Acabamos de ver cómo se ingenia el sujeto ante un dispositivo en el que intervienen muchos factores, para disociarlos y determinar sus acciones respectivas. Se trata ahora de estudiar las reacciones del niño y del adolescente ante un dispositivo análogo,[2] pero en el que sólo uno de los posibles factores es causal, mientras que los otros son inoperantes y deben pues provocar una exclusión posterior a su disociación. Esto es lo que sucede en el caso del péndulo, cuyos posibles factores, visibles en el dispositivo, son: la longitud del hilo, el peso, la altura de la caída (esto es, la amplitud de la oscilación) y el impulso que el sujeto le imprime. El primero de estos factores es el único efectivo; el problema consiste entonces en disociarlo de los tres restantes y excluir a estos últimos, cuando se trata —como se solicita a los sujetos— de hacer variar y explicar la frecuencia de las oscilaciones de un péndulo.

§ 1. ESTADIO I: INDIFERENCIACION ENTRE LAS ACCIONES DEL SUJETO Y LOS MOVIMIENTOS DEL PENDULO

El nivel preoperatorio I resulta interesante por el hecho de que las acciones materiales del sujeto suplantan aún en su totalidad a las operaciones mentales y que incluso se hallan relativamente indisociadas de los movimientos observados en el dispositivo como tal: en efecto, casi todas las explicaciones se reducen más o menos a concebir que el impulso que el sujeto imprime es la verdadera causa de las variaciones de la frecuencia de las oscilaciones:

[1] Con la colaboración de A. Morf, F. Maire y C. Lévy.

[2] La técnica consiste simplemente en presentar un péndulo bajo la forma de un sólido suspendido de un hilo y proporcionar al sujeto algo que le permita hacer variar la longitud del hilo, los pesos de los objetos suspendidos, la amplitud, etcétera. El problema consiste en encontrar los factores que condicionan la frecuencia.

Hen (6 años) imprime "impulsos" de fuerzas diferentes: "*Esta vez va rápido... Esta vez va a ir más rápido.* ¿Es correcto? *¡Oh! sí* (no hay lectura objetiva de la experiencia." Luego coloca un peso grueso con un hilo corto: "*Va más rápido* (imprime el impulso). *Va aun más rápido.* ¿Y para ir muy rápido? *Hay que quitar todos los pesos y hacer funcionar únicamente el piolín* (lo hace así pero con impulso). *Los vuelvo a colocar a todos, esta vez va rápido* (nuevos impulsos)." En cuanto a la altura: "*Si se coloca muy arriba, va rápido* (da un gran impulso)." Se le pregunta como conclusión si en verdad cree que las velocidades cambiaron: "*No, no se puede, sí se puede cambiar la velocidad.*"

Duc (7;3) está un poco más adelantado en cuanto a lo que sucede con algunas correspondencias (no sistemáticas) entre el aumento de la longitud del hilo y el crecimiento de las frecuencias. Sin embargo, no puede impedirse imprimir a cada instante un impulso y cuenta mal las oscilaciones: lo hace siempre influido por sus anticipaciones.

Vemos pues que, a falta de seriaciones y correspondencias exactas, el sujeto no logra ni leer de modo objetivo la experiencia ni siquiera atenerse a afirmaciones no contradictorias entre sí. Sobre todo, se comprueba que el niño interviene constantemente en los movimientos del péndulo sin poder disociar el impulso que imprime y los movimientos independientes de su acción.

§ 2. ESTADIO II: SERIACIONES Y CORRESPONDENCIAS PERO SIN DISOCIACION DE LOS FACTORES

Los sujetos del estadio II son capaces de seriar las longitudes, alturas, etcétera, y juzgar de modo objetivo diferencias de frecuencias. Logran así establecer correspondencias exactas desde el punto de vista de la experiencia bruta, pero no logran disociar los factores, salvo en el caso del impulso.

En el nivel II A, no se produce aún una seriación exacta de los pesos:

Jac (8 años) después de algunos ensayos en los que hacía variar la longitud del hilo: "*Cuanto menos alto es* (o sea cuanto menos largo es el hilo) *más rápido va.*" En cuanto al peso establece, en cambio, relaciones no coherentes: "*los grandes* (esto es, los pesados) *caen mejor, van más rápido*", por ejemplo "*no es éste* (500 g) *es aquél* (100 g) *que va más lentamente*", pero después de un nuevo ensayo, dice acerca del peso de 100 g: "*va más rápido.* ¿Qué hay que hacer para que vaya más rápido? *Poner dos pesos.* ¿O bien? *No poner ninguno, va más rápido cuando es más liviano.*" En cuanto a la altura de caída: "*Si se suelta muy bajo, va muy rápido*" y "*va más rápido si se suelta arriba*" pero en este segundo caso Jac también acorta el hilo.

Las seriaciones establecidas son pues exactas, excepto en el caso del peso; el sujeto puede entonces descubrir, a partir de este nivel, la correspondencia inversa entre la longitud del hilo y la frecuencia de las oscilaciones. Pero como no sabe disociar los factores, el sujeto deduce que este primer factor no es el único que se halla en causa. Y si también atribuye una función al peso y a la altura de caída, es porque hace variar muchas condiciones a la vez.

A pesar de los progresos realizados, en el nivel II B, por una seriación exacta de los efectos del peso (en la experiencia bruta), no se disocian aún los factores:

Bea (10;2) hace variar sin orden sistemático la longitud del hilo (según las unidades 2, 4, 3, etcétera); sin embargo deduce una correspondencia inversa correcta: "*Va más lentamente cuando es más largo.*" Para los pesos, compara 100 g, con una longitud de 2 o de 5, con 50 g, con una longitud 1, y de nuevo deduce una correspondencia inversa entre el peso y la frecuencia. Luego hace variar la altura de caída sin cambiar ni el peso ni la longitud (sin intención de igualar, sólo por simplificación de sus propios movimientos) y concluye: "*Las dos alturas van a la misma velocidad.*" Por último, varía el impulso, siempre sin modificar nada y también concluye: "*Es totalmente lo mismo.*"

Cro (10;2) no puede asimismo disociar el peso y la longitud, pero además hace variar al mismo tiempo la altura de caída. Comienza con un hilo largo y 100 g, luego acorta el hilo y toma 200 g que deja caer desde más arriba: "¿Encontraste algo? *Que el pequeño* (100 g) *va más lentamente y que cuanto más arriba está* (200 g con un hilo corto) *más rápido va.*" Pero luego coloca 50 g sobre el mismo hilo corto: "*El peso pequeño va aun más rápido.*" Sin embargo el sujeto deja de lado este último caso: "*Para ir más rápido, hay que subir el hilo* (disminuir la longitud) *y el pequeño va menos rápido porque es menos pesado.*" Luego: "¿Te preguntas todavía cómo hay que hacer para ir más rápido? *El peso pequeño va más rápido.* ¿Cómo puedes probarlo? *Hay que subir el piolín* (disminuir la longitud)."

Per (10;7) es un caso sorprendente de falta de disociación de los factores: hace variar al mismo tiempo el peso y el impulso, luego el peso, el impulso y la longitud, y luego el impulso, el peso y la altura, etcétera, y concluye en primer lugar: "*Hay que cambiar de peso e impulso, pero para nada el hilo.* ¿Cómo sabes que el hilo no interviene? *Porque es el mismo hilo* (no hizo variar la longitud en sus últimos ensayos y antes la cambió con el impulso, lo que complica la lectura de la experiencia). Pero la velocidad ¿cambió? *Depende, a veces es la misma... Sí, no mucho... Depende también de la altura que se ponga: cuando se suelta desde abajo, hay poca velocidad.*" Deduce luego la acción de los cuatro factores: "*Hay que cambiar el peso, el impulso,* etcétera. *Con el hilo corto, va más rápido*", pero también "*hay que cambiar el peso, hay que dar un impulso más fuerte*" y "*con la altura, se puede colocar más alto o más bajo*". "¿Cómo lo puedes probar? *Hay que probar dando impulso, bajando o levantando el hilo, cambiando la altura y el peso* (¡todo al mismo tiempo!)."

Mat (10;6) llega incluso a construir la variación simultánea de los factores: "¿Cómo sabes que con el peso va más rápido? *Cuando se coloca un peso grueso va más rápido.* ¿Encontraste esto? *Sí, subiendo el hilo* (esto es, disminuyendo la longitud), *luego se coloca el peso grueso al mismo tiempo.*"

Estos casos son muy instructivos en cuanto a la diferencia de las operaciones concretas y formales. Desde el primero de estos dos puntos de vista, los sujetos se hallan en posesión de todas las formas de seriación y correspondencia que les permiten hacer variar los 4 factores y asegurar la lectura del resultado de estas variaciones. Pero, a partir de estas operaciones sólo saben extraer inferencias fundadas sobre su transitividad (del modelo $A < C$ si $A < B$ y $B < C$) y siguen siendo incapaces de formular un razonamiento formal. Sus dos errores fundamentales, desde este segundo punto de vista, son los siguientes: 1) Al hacer variar varios factores al mismo tiempo, A_1, A_2, A_3, A_4 en A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, y al comprobar el cambio del resultado, X en X', creen haber demostrado que cada uno de estos factores produce por sí mismo el resultado X'. Traducido a un lenguaje proposicional, el error consistiría así en deducir a partir de $(p \cdot q \cdot r \cdot s) \supset x$ la fórmula $(p \supset x) \cdot (q \supset x) \cdot (r \supset x) \cdot (s \supset x)$ sin sospechar la existencia de las otras combinaciones posibles (véase Mat en el caso de dos factores: $p \cdot q \supset x$ por lo tanto $q \supset x$). 2) De modo recíproco, el sujeto Per, una vez modificados todos los factores salvo uno (la longitud del hilo) y al no estar muy seguro de que el resultado se modificó, deduce la no eficacia de este único factor que permaneció constante (no se trata "para nada del hilo... ¡porque es el mismo hilo!"). En otros términos, de $p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot (x) \vee p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s}(x \vee \bar{x})$ deduce $\overline{p \supset x}$.

Resulta pues evidente que estos sujetos carecen aún de algún instrumento lógico para interpretar los datos de la experiencia y que, si no disocian los factores, no es por simple pereza mental: así como Bau (cap. III, § 2) hacía variar dos factores a la vez en la comparación de la flexibilidad de las varillas, para que el resultado fuera "más diferente", así Mat y los sujetos anteriores se proponen, de modo explícito, modificarlo todo a la vez para obtener transformaciones más grandes. Carecen de una combinatoria formal: habituados a clasificar, seriar y establecer correspondencias, se atienen a sus cuadros de variación sin imaginar la multiplicidad de las combinaciones que de ellas pueden extraerse y, a falta de esta combinatoria fundada sobre el "conjunto de las partes", no piensan en disociar los factores en juego.

§ 3. SUBESTADIO III A: DISOCIACION POSIBLE PERO NO ESPONTANEA

En el nivel formal inferior III A, el niño se vuelve capaz de disociar los factores cuando se halla en presencia de las combinaciones en las que varía uno de los factores mientras que los otros permanecen constantes:

razona entonces de manera correcta y ya no según el tipo de inferencias de las que acabamos de ver algunos ejemplos. Sin embargo, no sabe aún provocar por su cuenta y de modo sistemático estas combinaciones, vale decir, que las operaciones formales ya están suficientemente esbozadas para permitir ciertas inferencias, pero aún no lo bastante organizadas para funcionar a título de esquema anticipatorio.

Jot (12;7) supone que "*Hay que tirar* (alargar) *el hilo*". Cuelga 20 g y varía la longitud: "*Va más lentamente cuando se baja* (esto es, cuando se alarga) *el hilo y más rápido cuando está arriba.* ¿Es esto todo? *El peso quizás hace otra cosa.*" Pero para verificarlo toma 100 g, alarga y acorta el hilo, luego toma 50 g y alarga y acorta de nuevo el hilo: "*Sí, va más rápido cuando está arriba* (esto es, cuando el hilo es corto); *es el hilo.*" En otras palabras, hace variar el hilo en lugar de los pesos, luego cambia de peso y de nuevo hace variar de la misma manera el hilo: este procedimiento permite llegar a conclusiones correctas con la condición de que recuerde, al pasar de una situación a la otra, las frecuencias respectivas, pero complica las cosas de modo inútil. Cuando se le solicita que pruebe el papel que desempeña la longitud, se contenta con sólo una deducción: "*Cuando el hilo es largo, pone más tiempo para ir de un extremo al otro. Cuando es corto pone menos tiempo.*"

Ros (12;8) descubre de entrada el papel de la longitud cuando alarga y acorta el hilo con un mismo peso. Luego disminuye el peso pero al mismo tiempo acorta el hilo: 200 g con un hilo largo y 20 g con un hilo corto. Concluye que "*el peso también actúa*". Procede del mismo modo para controlar el papel del impulso y concluye que "*también influye el impulso*". Pero, comienza a dudar en lo que se refiere al peso y percibe la necesidad de dejar invariante el otro factor: la longitud; entonces acorta el hilo y coloca sucesivamente 50 g y 100 g. Como el resultado no cambia su duda aumenta: "*Hay que rehacer todo para ver si es correcto.*" Entonces vuelve a empezar pero de nuevo hace variar el peso y la longitud. Esta vez duda respecto del papel de la longitud, toma 20 g, alarga y luego acorta el hilo: "*Cuando es más pequeño* (más corto), *el peso va más rápido: es porque no había colocado un mismo peso.*" No obstante sigue creyendo que el peso tiene influencia. Entonces se procede a cambiar ante él y al mismo tiempo los pesos y las longitudes: "Esto, ¿prueba algo? *No, porque hay que poner el mismo peso.* ¿Por qué? *Porque el peso hace ir con más rapidez* (!)."

Lou (13;4) compara asimismo 20 g con hilo corto con 50 g con hilo largo y concluye que "*va más rápido con el peso pequeño*". Luego, cosa muy curiosa, vuelve a hacer una experiencia semejante pero invierte los pesos (50 g con un hilo largo y 100 g con un hilo corto), pero esta vez concluye que "*cuando es corto, va más rápido*" y "*me parece que el peso grande va más rápido*"; ahora bien, ¡no concluye sin embargo que el peso no juega papel alguno! "¿El peso interviene para algo? *Sí* (toma un hilo largo con 100 g y uno corto con 20 g). *¡Oh! me olvidé de cambiar el hilo* (lo acorta, pero sin mantener constante el peso). *¡Ah! no, no había que cambiarlo.* ¿Por qué? *Porque buscábamos* (el papel) (d) *el hilo.*

Pero, ¿qué viste? *Cuando el hilo es largo, va más lentamente.*" Lou verificó, a pesar de él, el papel de la longitud, pero no comprendió la necesidad de dejar constantes los factores no analizados ni de hacer variar el factor que se analiza.

Estos casos de transición presentan un interés evidente y muestran casi mejor aún que los ejemplos del nivel II B la dificultad que provoca la disociación de los factores y el método "permaneciendo igual todo lo demás". En primer lugar, como para los sujetos del nivel II B, volvemos a encontrar la tendencia a hacer variar sin intención alguna dos factores a la vez e incluso (en el caso de Lou) la tendencia a no hacer variar el factor en cuestión. Sin embargo, como a pesar de ellos mismos y bajo la influencia de las operaciones formales nacientes, estos sujetos sienten que, al proceder así, no demuestran nada. Llegan entonces a transformar en hecho el factor que querían dejar sin modificación (como Lou), o bien (como Jot) a variarlo todo pero alternativamente y sin saber concentrar el método de análisis en el punto que se analiza. Su conclusión es entonces exacta en lo que se refiere al papel del factor longitud, el único eficaz; pero no lo es, a falta de combinaciones destinadas a permitir la exclusión, en lo que concierne a los factores peso o incluso impulso, etcétera. En otros términos, la lógica formal en vías de formación es, en ellos, superior a su capacidad experimental y no estructuró aún bastante sus métodos de prueba: logran pues manejar las operaciones más fáciles —las que afirman lo que es— y establecen las implicaciones verdaderas, pero fracasan en el caso de las más difíciles —las que excluyen lo que no es— y niegan las implicaciones falsas.

§ 4. SUBESTADIO III B: LA DISOCIACION DE LOS FACTORES Y LA EXCLUSION DE LAS RELACIONES INOPERANTES

Los sujetos del nivel III B logran, en el caso del péndulo como en el de la flexibilidad (cap. III), disociar todos los factores en juego mediante el método que consiste en hacer variar sólo uno por vez y mantener "igual todos los demás". Pero, como sólo uno de estos cuatro factores en juego desempeña en este caso particular un papel causal, los tres restantes deben excluirse: esta exclusión constituye pues el hecho nuevo, tanto en oposición con el nivel III A, en el que esta operación era aún imposible, como en comparación con la experiencia de la flexibilidad, donde no tenía que intervenir para nada.

Eme (15;1) después de elegir 100 g con un hilo largo y un hilo mediano, luego 20 g con un hilo largo y otro corto y, por último, 200 g con uno largo y uno corto, concluye: "*La longitud del hilo hace que vaya más rápido o más lento; el peso no interviene.*" Excluye asimismo la altura de caída y el impulso.

Egg (15;9) al comienzo cree que intervienen los cuatro factores. Estudia diferentes pesos con un hilo de la misma longitud (media) y no comprueba ningún cambio apreciable: "*No cambia el ritmo.*" Luego hace variar la longitud del hilo con un mismo peso de 200 g y encuentra que "*cuando el hilo es pequeño, el balanceo va más rápido*". Por último, hace variar la altura de caída y el impulso (sucesivamente) con un mismo hilo medio y un mismo peso de 200 g y concluye, para cada uno de estos dos factores: "*No cambian nada.*"

La simplicidad de estas respuestas, comparada con las dudas del nivel III A, no debe provocar ilusiones: es el resultado de una elaboración compleja, cuyo mecanismo operatorio se trata ahora de analizar.

Llamemos p al enunciado de una modificación en la longitud del hilo y $\bar{p}$ a la ausencia de esta modificación; q será el enunciado de una modificación del peso y $\bar{q}$ la ausencia de esta modificación; asimismo r y s enunciarán una modificación de la altura de caída y del impulso, y $\bar{r}$ y $\bar{s}$ la invariancia de estos factores. Por último x será la proposición que enuncie una modificación del resultado, esto es, de la frecuencia de las oscilaciones, mientras que $\bar{x}$ enunciará la ausencia de todo cambio en las frecuencias.

Cuando Eme hace variar la longitud del hilo con pesos iguales (y sucesivamente para tres pesos diferentes) comprueba entonces la verdad de las siguientes combinaciones:

$$1)\ (p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{x})$$

Vale decir que la modificación de la longitud corresponde, con modificación del peso o sin ella, a una modificación de la frecuencia y la ausencia de la primera transformación corresponde, con modificación del peso o sin ella, a la ausencia del resultado x.

En cambio, las cuatro combinaciones $(p \cdot q \cdot \bar{x}) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot x)$ permanecen inverificadas porque cuando se tiene p nunca se tiene $\bar{x}$ y, de modo recíproco, cuando se tiene x nunca se tiene $\bar{p}$.

Ahora bien, la expresión (1) se descompone en dos operaciones. En primer lugar, hay una implicación recíproca entre p y x, o sea $p \underset{C}{\supset} x$, lo que expresa el sujeto cuando dice: "La longitud del hilo hace que vaya más rápido o más lento." En segundo lugar, no existe relación particular entre q y x puesto que se realizan las 4 combinaciones posibles $(q \cdot x) \vee (q \cdot \bar{x}) \vee (\bar{q} \cdot x) \vee (\bar{q} \cdot \bar{x})$ (lo escribiremos bajo la forma $(q \star x)$ y diremos que hay entonces tautología o "afirmación completa"). El sujeto la expresa cuando afirma: "El peso no interviene." En cuanto a la relación entre p y q, la escribiremos $p \cdot (q \vee \bar{q})$ o, para abreviar $p\,[q]$, esto es, hay afirmación de p con o sin q; asimismo se tiene $\bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})$, es decir, hay negación de p con o sin q (esta afirmación y esta negación reunidas equivalen entonces a $p \star q$).

Se puede entonces escribir la expresión (1) del siguiente modo:

2) $(p \overset{\supset}{C} x) \cdot (q \star x) = p \cdot (q \vee \bar{q}) \overset{\supset}{C} x$ o abreviando $p\,[q] \overset{\supset}{C} x$

Se comprueba entonces que la exclusión del peso como causa de la modificación de las frecuencias de oscilaciones resulta simplemente de la comprobación de $(q \star x)$, esto es, del hecho de que se realizan todas las combinaciones entre q y x: excluir el peso significa entonces excluir toda relación *particular* entre q y x.

Los razonamientos son los mismos en lo que concierne a la exclusión de la altura de caída y del impulso. Pero como el sujeto toma en cuenta a la vez la longitud y el peso cuando analiza el papel de la altura de caída (r y $\bar{r}$), existen entonces 8 combinaciones verdaderas:

3) $(p \cdot q \cdot r \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot x) \vee$
$(\bar{p} \cdot q \cdot r \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r} \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{x})$
$= [(p \overset{\supset}{C} x) \cdot (q \star x) \cdot (r \star x)] = p\,[q \vee r] \overset{\supset}{C} x$

en la cual la expresión $p\,[q \vee r]$ significa $p \cdot (q \vee r) \vee p \cdot (\bar{q} \cdot \bar{r})$.

Por otra parte, al estudiar el papel del impulso (s ó $\bar{s}$), el sujeto también toma en cuenta la longitud, el peso y la altura de caída. Se halla entonces en presencia de 16 combinaciones verdaderas:

4) $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot r \cdot \bar{s} \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \cdot s \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot x) \vee$
$(p \cdot \bar{q} \cdot r \cdot s \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot r \cdot \bar{s} \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot s \cdot x) \vee$
$\vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r \cdot s \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot r \cdot \bar{s} \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r} \cdot s \cdot \bar{x}) \vee$
$(\bar{p} \cdot q \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot \bar{x}) \vee$
$\vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r \cdot s \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r \cdot \bar{s} \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot s \cdot \bar{x}) \vee$
$\vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot \bar{x}) = [(p \overset{\supset}{C} x) \cdot (q \star x) \cdot (r \star x) \cdot (s \star x)] = p$
$[q \vee r \vee s] \overset{\supset}{C} x$

De este modo se comprueba que la exclusión de los tres factores inoperantes que parece tan simple a primera vista, como la implicación recíproca de la longitud y el resultado x, suponen en realidad una combinatoria complicada y el sujeto sólo la domina cuando logra seriar uno a uno los factores que deben variarse manteniendo al mismo tiempo invariantes a todos los demás. Por ejemplo, en la expresión (4) le bastará con las dos primeras combinaciones $(p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot x) \vee (p \cdot q \cdot r \cdot \bar{s} \cdot x)$ para deducir que la frecuencia no implica la intervención del impulso $(s \cdot x)$ y le bastará añadir las dos últimas combinaciones para deducir $(s \star x)$, esto es, para excluir totalmente el papel de este factor. Pero resulta evidente que para elegir así las combinaciones que sirven como prueba, hay que tener una idea, por lo menos aproximada, del conjunto de las otras. Por ello la disociación de los factores mediante el método de "permaneciendo igual todo lo demás" y la exclusión de los factores inoperantes son tan tardías y sólo corresponden al nivel III B.

La mejor prueba de la necesidad de esta combinatoria la encontramos en el hecho de que el sujeto del subestadio III B no se conforma con extraer, con una simplicidad aparente, las conclusiones exactas de las combinaciones demostrativas que se imagina durante la experiencia: también evita el conjunto de los paralogismos que hemos observado en los niveles II B y III A. Ahora bien, si se comparan las inferencias correctas del subestadio III B con estas falsas inferencias, se comprueba que la elección se halla nuevamente dictada por la presencia de una o dos combinaciones probadoras, lo que supone, una vez más, un cierto dominio del sistema de todas las combinaciones posibles.

Por ejemplo, en el caso de la influencia eventual del peso (q) el sujeto puede dudar entre la operación (3) $p\,[q] \underset{C}{\supset} x$ y las operaciones $(p \vee q) \underset{C}{\supset} x$ ó $(p \cdot q) \underset{C}{\supset} x$ admitidas en el nivel III A y que significan que el cambio de frecuencia se produce por la longitud, por el peso, o por ambos a la vez $(p \vee q)$, o también que se produce siempre por la presencia de ambos $(p \cdot q)$. En estos casos tendríamos:

$$5)\ [(p \vee q) \underset{C}{\supset} x] = (p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{x})$$

y

$$6)\ [(p \cdot q) \underset{C}{\supset} x] = (p \cdot q \cdot x) \vee (p \cdot \bar{q} \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot q \cdot \bar{x}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{x})$$

Se comprueba pues que la expresión (5) no difiere de las expresiones (1) y (2), equivalentes entre sí, salvo por la presencia de $(\bar{p} \cdot q \cdot x)$ y la ausencia de $(\bar{p} \cdot q \cdot \bar{x})$ y que la expresión (6) sólo difiere de ellas por la presencia de $(p \cdot \bar{q} \cdot \bar{x})$ y la ausencia de $(p \cdot \bar{q} \cdot x)$. Ahora bien, el adolescente del nivel III B sabrá muy bien excluir $(\bar{p} \cdot q \cdot x)$ y $(p \cdot \bar{q} \cdot \bar{x})$ puesto que precisamente verifica la falsedad de $\bar{p} \cdot x$ y $p \cdot \bar{x}$ (= cambios de frecuencia sin modificación de la longitud o recíprocamente) al mismo tiempo que admite la verdad de $q \cdot x$ y de $\bar{q} \cdot \bar{x}$ (= cambio simultáneo de frecuencia y peso o invariancia de ambos) cuando el factor longitud interviene al mismo tiempo. Resulta entonces claro que el hecho de rechazar un modo de razonamiento admitido corrientemente hasta el subestadio III B supone de nuevo una cierta elección entre combinaciones posibles, es decir, entre las que deben excluirse y entre las verdaderas. Para referirnos a un caso concreto, recordamos que Ros (en III A) hace variar al mismo tiempo el peso y la longitud y deduce la influencia del primero: a partir de las combinaciones $(p \cdot q \cdot x) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{x})$, extrae $q \supset x$ o $x \supset q$. Ahora bien, lo propio de la experiencia de Eme (en III B) consiste precisamente en no contentarse con estas dos combinaciones y retener la verdad de las 4 combinaciones contenidas en la expresión (1), sobre todo la de $(p \cdot \bar{q} \cdot x)$ que excluye $x \supset q$ (ya que $\bar{q} \cdot x$ = variación de la frecuencia sin modificación del peso) y la de $(\bar{p} \cdot q \cdot \bar{x})$ que excluye $q \supset x$ (ya que $q \cdot \bar{x}$ = variación del peso sin resultado sobre la frecuencia). Este mismo tipo de elección vuelve a encontrarse, por supuesto,

en los casos de la altura de caída y del impulso. Si registramos todas las inferencias admitidas por un sujeto del nivel III B y todas las que rechaza, debemos, forzosamente, concederle el conocimiento de las combinaciones de la expresión (4), que suponen otras 16 combinaciones rechazadas, o sea, una elección realizada entre 32 combinaciones de base.[3] Estas elecciones implican, en definitiva, un muestreo entre un conjunto de combinaciones de base y, una vez más, son estas elecciones —o este muestreo— las que constituyen la combinatoria formal fundada sobre el "conjunto de las partes", mientras que las operaciones concretas simplemente constituyen una construcción de las correspondencias que componen estas combinaciones de base.

[3] En el caso de la flexibilidad (5 factores y el resultado) habrá incluso 64 combinaciones de base. Pero, para encontrar el papel de cada factor basta con que se retengan alternativamente las parejas de combinaciones cuyo modelo proporciona la operación (3) del cap. III.

CAPITULO V

LA CAIDA DE LOS CUERPOS SOBRE UN PLANO INCLINADO

y las operaciones de disyunción [1]

El dispositivo consiste en un plano que puede regularse con diversas inclinaciones. Sobre él rueda una bola que en la parte inferior del plano, salta desde un trampolín. El problema consiste en encontrar la correspondencia entre la altura de la caída y la longitud del salto. Por supuesto que el sujeto no sabrá calcular la forma parabólica de la curva descripta por el salto, pero según cómo se le presenta la experiencia podrá descubrir que su longitud sólo es función de la altura de caída, con exclusión de los factores de masa, peso, inclinación o distancia.

§ 1. ESTADIO I: INTUICION GLOBAL SIN LECTURA OPERATORIA DE LA EXPERIENCIA

Ya antes de los 7 años existe una correspondencia intuitiva entre la inclinación y la longitud del salto, pero no se disocia la altura de la inclinación y el peso desempeña un papel constante, sujeto, por otra parte, a posibles contradicciones:

Ver (5 años): "*Esta va al* 2 (segundo casillero a partir de la extremidad inferior del plano) *porque es demasiado pequeña. Si fuera grande así* (gesto) *iría acá* (8)."

Stu (6;5) comprueba que una bola llega al casillero 4 en el caso de una pendiente dada, luego al 2 "*porque se bajó el coso.* ¿Qué vamos a hacer para ir allí (6)? *Bajar más* (fracaso). *No hay que colocarlo así* (más alto: llega al 4). *No, hay que colocarlo más arriba. Quiero ir aquí* (8): *hay que ponerlo muy arriba* (logro aproximado). *Sí: para ir cerca hay que colocarlo muy abajo y para ir lejos*

[1] Con la colaboración de H. Aebli y L. Müller.

hay que ponerlo más arriba". En cuanto a la masa, piensa que una bola pequeña irá menos lejos.

Pit (6;6): "¿Dónde irá esta bola? *Muy al fondo: es más pesada.* Mira (se coloca una bola pequeña que llega al mismo lugar). *Porque es alto.*"

Mic (6;10) para ir lejos hay "*que subir la gotera.* ¿Y si no se puede? *Hay que lanzar fuerte.* (Llega al 3.) *Porque no está alto, no corre rápido.*"

Val (7;1): "*Porque corre rápido y todavía tiene impulso.* ¿Y ésta? *Tendrá bastante impulso para llegar allí* (4: fracaso). *Sin embargo tenía impulso; se tendría que subir un poco más.*"

Wag (6;7): "*Voy a colocar esta grande; voy a ponerla más abajo, si no va demasiado lejos porque tiene más peso, entonces pesa, va demasiado rápido y va demasiado lejos; es pesada: hace impulso.* ¿Y ésta? *La pequeñita no irá tan lejos, porque no tendrá impulso, no es pesada.* (Experiencia: cae lejos.) ¡*Porque fue lejos! Se habrá caído más rápido que las otras porque es pequeña. Voy a probar con una grande: tal vez irá muy al fondo* (!). (Experiencia.) *Sí, porque es grande fue lejos. Tengo que ver qué pasa con una mediana* (cae en el mismo punto que las dos últimas). *Sí, porque es pesada: cae más rápido* (nueva experiencia: ídem). *Porque es pequeña, no es pesada, entonces* ¡*es por eso! No fue muy lejos* (ahora niega el hecho)." Otra bola: "*porque es pesada, entonces cae más rápido porque tiene un gran impulso. Coloco la grande: quiere ir lejos porque está muy inclinado.*"

En cada uno de estos casos se comprueba la existencia de una cierta intuición, evidentemente extraída de la experiencia propia (deslizamientos, bajadas en trineos, en pequeños carritos, etcétera): cuanto más se inclina, más rápido y lejos llega el móvil. Pero la altura de caída no se disocia de la inclinación y el peso (concebido proporcional al tamaño) desempeña un papel sistemático. Pero este papel varía: por lo general, una bola más pesada va más lejos, pero si es necesario también puede suceder así con las más pequeñas. En este sentido, una experiencia contraria no podría aún desengañar al sujeto, y cuando se halla indeciso se contradice o bien llega a negar los hechos (Wag emplea alternativamente los dos procedimientos). Sucede así porque aún no intervienen las operaciones de seriaciones ni las correspondencias susceptibles de asegurar la coherencia de las comprobaciones. Si nos atenemos a un sujeto poco locuaz, como Stu, se puede tener la impresión de que hay una correspondencia exacta entre la inclinación y la longitud del salto, pero si se considera a un sujeto que dice todo lo que piensa, e incluso un poco más, se comprueba que esta intuición sigue siendo global porque se halla inserta en un contexto sin operaciones propiamente dichas.

§ 2. ESTADIO II: ENSAYOS DE CORRESPONDENCIAS OPERATORIAS Y EXCLUSION ORDINARIA DEL PESO

A partir del nivel II A se asiste a establecimientos de correspondencias correctas, pero aún no sistemáticas y, por supuesto, sin la presencia de los procedimientos destinados a la disociación de los factores. Sin embargo, de acuerdo con el modo en que se presenten las bolas, el sujeto ya logra a menudo excluir el factor peso como factor que se opone a toda correspondencia serial:

Gui (7;2): para ir más lejos *"hay que colocar más arriba.* ¿Y para llegar aquí (extremo)? *Muy arriba* (experiencia). *¡Ah! Sí: es el último* (casillero). ¿Y para aquí (primer casillero)? *Hay que bajar a la primera* (muesca) *porque se desliza menos.* ¿Y aquí (hacia el medio)? *Más arriba, porque se desliza más rápido"*, etcétera.

Lau (8;2) las mismas correspondencias para las inclinaciones. En cuanto a los tamaños, Lau declara de modo espontáneo: *"Las bolas irán a los agujeros* (cada vez más alejados) *por orden de tamaños* (¡seriación anticipada!). ¿Cómo, por orden de tamaños? *La más pequeña va más cerca y la más grande más lejos; las del medio en el medio* (hace la experiencia). ¿Entonces? *Van a cualquier lado. El tamaño no quiere decir nada: casi todas fueron de la misma manera."* Por último: *"Según dónde se coloque la gotera, va en los agujeros. Se coloca muy arriba para que la bola vaya más lejos: depende de la altura de la gotera.* ¿Y el tamaño de las bolas? *El tamaño no influye."*

Schi (8;8) también: *"Hay que subir, bajar, etcétera."* Por último: depende del tamaño: *"¡Ah! No. Van a cualquier casillero, y luego se sube para ir más lejos"*, etcétera.

Existe pues una seriación exacta de las inclinaciones, seriación exacta de las longitudes de salto y correspondencia aproximada entre dos ("cuanto más... más"): aproximada porque el sujeto no piensa en la altura y porque ni siquiera se le ocurre disociar la distancia recorrida en la bajada de la inclinación misma. Pero como las diferencias no son considerables, la correspondencia funciona en términos generales.

En cambio, lo que resulta sorprendente es la exclusión del peso, exclusión no general sin duda alguna, pero fácil de obtener como lo muestran los casos tan nítidos de Lau y Schi. Ahora bien, en lo que se refiere al péndulo, se recuerda que sólo se excluye el peso a partir del nivel III B y que los sujetos de 12-14 años (III A) no logran aún hacerlo. Por otra parte, la hipótesis según la cual el peso desempeña un papel en la caída resulta muy natural y sigue subsistiendo incluso entre los adultos que olvidaron sus lecciones de física. La exclusión de este factor en el nivel II A, sin empleo posible de ninguna operación proposicional formal, plantea pues un problema. Nos parece que la solución se debe ante todo al hecho de que, en este caso particular, los factores peso

e inclinación se disocian de por sí sin que el sujeto tenga que proporcionar en este sentido actividad operatoria alguna. En efecto, cuando Lau quiere verificar su anticipación de que existe una correspondencia entre el tamaño de las bolas y la longitud de sus saltos, no se le ocurre hacer variar al mismo tiempo las inclinaciones, ya que la pendiente, salvo que se la desplace de modo intencional, permanece inmóvil. En el caso del péndulo, por el contrario, donde se trata de evaluar el número de las oscilaciones y donde el sujeto debe ajustar los pesos a los hilos, estará siempre tentado de cambiar a la vez el peso y el hilo con el fin de obtener resultados más claros (más "diferentes" como decía Bau) y le será necesario emplear un método sistemático para disociar los factores. Los factores inclinación y peso se disocian por sí mismos en el caso del plano inclinado y le resulta entonces fácil al niño comprobar que, contrariamente a toda expectativa, las bolas de tamaños variados llegan más o menos al mismo lugar. La segunda razón de esta exclusión del peso se debe pues a la evidencia de una no correspondencia entre el peso y la longitud del salto. Por el contrario, en el caso del péndulo, el sujeto siempre puede preguntarse ante una comprobación negativa si el peso no desempeña a pesar de todo un cierto papel, y se hacen necesarias las experiencias sistemáticas del nivel III B, que desembocan en un muestreo de las combinaciones probadoras entre el conjunto de las combinaciones posibles, para excluir definitivamente este factor.

El subestadio II B se caracteriza, además de sus seriaciones y correspondencias más sistemáticas, por un inicio de disociación entre la altura de caída y la inclinación. Resulta interesante señalar que en este mismo nivel en el caso de otras experiencias (véase el pequeño vagón del cap. XII) también comienza a transformarse la altura en un factor diferenciado y traducible a la vez en términos homogéneos a los otros. Pero esta diferenciación naciente no llega hasta el punto de permitir una exclusión de la inclinación en provecho únicamente de la altura, lo cual supondría una verificación sistemática y activa destinada a establecer si estos dos factores son independientes o si simplemente se hallan relacionados.

Jea (8;10) ordena de modo sistemático sus inclinaciones: *"Ahora 3 porque acabo de hacer 2"*, etcétera, luego dice: *"Cuanto más desciende, con más rapidez va."* Después comprueba que con una inclinación menor (4 en vez de 7), *"si se coloca más lejos* (esto es, más alto), *es como si se corriese una muesca"*. El intento de seriación sistemática le hace pues descubrir que el factor altura es distinto del factor pendiente.

Mid (9;9): *"Está combinado: si se sube esto* (elevó sucesivamente el mecanismo de la pendiente a 3, 4 y 5), *aquí se produce un salto más grande. Voy a ver qué pasa con el impulso* (toma una bola más pequeña y vuelve a empezar: 3, 4, 5, 6, 7 y 8). *Es lo mismo para la grande y las pequeñas: es la altura que hace esto* (la longitud del salto), *que sea liviana no quiere decir nada."* Sin embargo, no por ello disocia altura e inclinación.

Bli (10;2) varía las inclinaciones: "*Si es más inclinado, la bola va más lejos.* ¿Y los tamaños? *Todas las bolas irán al mismo agujero, las cosas no podrían suceder de otro modo* (verifica con una pequeña, luego vuelve a las inclinaciones y, después de un error de previsión, afirma). *La coloqué demasiado hacia atrás* (esto es, demasiado arriba), *por lo tanto tengo que colocarla más abajo* (experiencia). *Es demasiado bajo* (nueva experiencia, siempre sin cambiar la inclinación), *hay que ponerla más arriba porque tiene menos impulso cuando está menos inclinado* (esto es, compensa la débil inclinación con un punto de partida más alejado, por lo tanto, más elevado)." Después de algunos nuevos intentos: "*Ahora sé qué pasa: siempre llega detrás de la misma puerta* (o sea, en el mismo casillero) *cuando la altura es igual.*" Intenta hacer corresponder las inclinaciones y la longitud de los trayectos de bajada para llegar cada vez al mismo agujero (3): 25 cm para la inclinación 10; 30 cm para 8; 35 cm para 6 y 40 cm para la inclinación 4. La experiencia lo confirma y concluye: "*Cuanto más arriba se sube, más agujeros hay* (o sea, más largo es el salto)."

Se ve pues que, en vez de contentarse con correspondencias del estilo "cuanto más... más" estos sujetos se interesan en la construcción de correspondencias sistemáticas, siguiendo por ejemplo el orden ascendente 1, 2, 3... de las inclinaciones para comprobar un orden progresivo de las longitudes de salto (ahora bien, estas series no se hallan numeradas sobre el dispositivo; las inclinaciones están determinadas por una sucesión de agujeros en los que se coloca la ficha que fija la deslizadera y los casilleros se distinguen entre sí mediante dibujos varios: casa, pino, etcétera).

Sin embargo, la correspondencia que el sujeto elabora de este modo no se verifica en su totalidad, y es así por tres razones. En primer lugar, los agujeros que determinan las inclinaciones no corresponden exactamente (así se lo decidió) a los casilleros. En segundo lugar, existen fluctuaciones posibles (roces, etcétera). En tercer lugar el sujeto, si no presta especial atención, puede hacer variar sus distancias: en el interior de la deslizadora se encuentra una escala en cm, de tal modo que, para una inclinación dada, la bola puede colocarse a 25, 30, 35 cm, etcétera y así se hace variar la altura; se producen entonces nuevas desviaciones posibles en la correspondencia del punto de partida.

Ante estas variaciones de la correspondencia entre las inclinaciones y las longitudes del salto, el sujeto busca entonces determinar los factores que intervienen. En primer lugar está el peso, en el que piensan casi todos los sujetos, salvo raras excepciones (como Bli). Pero este factor se descarta durante la experiencia por la misma razón que en el nivel II A: ausencia de toda correspondencia (véase Mid).

Queda entonces la altura, el factor que por lo general descubren los sujetos de este subestadio influidos por la mayor precisión de sus ensayos de correspondencia. Jea, por ejemplo, en presencia de las irregularidades de su correspondencia se da cuenta del hecho de que "si se coloca más lejos (por lo tanto más arriba) es como si se corriese una

muesca", vale decir que, con una inclinación de 4, si se hace salir la bola de más arriba se obtiene el mismo resultado que con una inclinación de 7 si se la hace salir de más abajo. En cuanto a Bli, llega a establecer una serie de equivalencias métricas según la fórmula lógica: "Más arriba × menor inclinación = más abajo × mayor inclinación" y así la bola llega cada vez al mismo casillero.

Sin embargo estos sujetos no descubren todavía que, en realidad, el único factor que entra en juego es la altura, en oposición a la inclinación y distancia por más que esta altura puede calcularse como una resultante de la inclinación y la distancia combinadas entre sí (según la fórmula de Bli). El problema de la exclusión del factor inclinación en provecho del factor altura se planteará por lo tanto de modo harto diferente para los sujetos de los niveles II B, III A y III B, que el de la exclusión del peso o la amplitud en provecho de la longitud, en el caso del péndulo, ya que no se tratará de la exclusión de un factor independiente en provecho de otro, sino de una cierta relación en provecho de otra de la que constituye una parte. En efecto, a alturas iguales, ni la inclinación ni la distancia desempeñan papel alguno si se las hace variar: no se tiene por un lado el factor inclinación y, por el otro, el factor distancia o altura. De la multiplicación lógica "inclinación × distancia = altura" sólo cuenta el producto (la altura), los dos multiplicandos sólo intervienen entonces como factores separados. Ahora bien, el sujeto no sospecha esta situación y sólo la comprenderá con dificultad en el nivel III. Dicho de otro modo, el sujeto del subestadio II B razona acerca de la inclinación y la distancia como si se tratase de dos factores independientes; el papel de uno de ellos le parece evidente desde el comienzo, el del otro lo acaba de descubrir, y si llega el caso piensa que estos dos factores pueden compensarse (véase Bli). Tiene aún que descubrir que sólo cuenta la altura y que, para establecer una correspondencia entre la longitud de los saltos de la bola y el factor causal que determina esta longitud, basta considerar esta altura sin ocuparse de las inclinaciones, ni de las distancias recorridas. Es cierto que a veces el niño parece comprender ("es la altura que hace esto", Mid), pero sólo se trata aún de enunciados no muy bien diferenciados.

§ 3. ESTADIO III: COMPENSACIONES NECESARIAS ENTRE LA INCLINACION Y LA DISTANCIA (III A), LUEGO DESCUBRIMIENTO DE LA ALTURA COMO FACTOR UNICO (III B)

El nivel III A (12 a 14 años) casi no difiere del nivel II B, en este caso, salvo en cuanto al método empleado. Mientras que los sujetos del subestadio II B comienzan por establecer correspondencias sistemáticas entre las inclinaciones y la longitud de los saltos y sólo descubren secun-

dariamente el papel de la distancia, los preadolescentes del subestadio III A son más ricos en cuanto a la formulación de hipótesis rápidas y, desde el comienzo mismo, intentan hacer el inventario de los factores de tal modo que muy rápidamente distinguen a la inclinación y a la distancia como factores coexistentes. Sin embargo no por ello descubren el papel de la altura como factor único y suficiente; sucede así porque no proceden según el método habitual en el nivel III B: disociación de los factores mediante variaciones separadas, "permaneciendo igual todo lo demás". Por ello las respuestas del nivel III A resultan sorprendentes sobre todo por la generalidad de la idea de la compensación entre la inclinación y la distancia, idea ya construida en el nivel II B:

Rou (12;1): "*Lo más alto posible e irá aquí* (lo más lejos)." Sin embargo la inclinación desempeña aún un papel separado: "*Creí que iría menos fuerte porque caería a pique.*" Descubre entonces la compensación: "*Cuando era más alta* (la inclinación), *había que colocarla más abajo* (distancia) *y cuando es más baja* (la inclinación) *hay que colocarla más arriba* (distancia)" y "*si se sube* (distancia), *hay que bajar* (la deslizadera) *en 5 ó 10 grados y cuando se sube* (la deslizadera), *hay que bajar* (distancia)". Toma entonces una inclinación de 4 y desciende de 5 en 5 cm para llegar a los casilleros cada vez más próximos: "*Cuando se queda fija* (inclinación), *esto tiene que descender de 5 en 5.*" Conclusión: "*Cada vez que el ángulo se vuelve 5 grados más pequeño hay que descender 5 cm.*"

Stro (12;6): "*Cuanto más horizontal es la barra* (deslizadera; o sea, poco inclinada), *más de costado hay que colocar la bola* (o sea, aumentar la distancia)." Hace entonces cálculos complicados: "*Uno puede guiarse según los puntos* (inclinación) *y los intervalos* (distancias); *se multiplica cada agujero.* ¿Cómo? *Un poco más, un poco menos* (en realidad, no supera la idea cualitativa de compensación)."

Her (13;6) verifica en primer lugar el papel de los pesos y deduce: "*No influye mucho: funciona como si fuesen parecidos.* ¿Estás seguro? *Segurísimo.*" Luego comprueba, al igual que los sujetos anteriores, que aumentar la distancia equivale a elevar la deslizadera.

Bastaría que estos sujetos realizasen un estudio sistemático de los factores, como comienza a hacerlo Rou cuando analiza el papel de las distancias con inclinación igual, para que este análisis, junto con la noción de compensación general en este nivel, los condujera a la hipótesis de la altura como factor único. Es lo que se comprueba en el nivel III B:

Sal (13;3) comienza con la hipótesis acerca de la masa: "*La pequeña irá forzosamente más rápido.*" Pero los hechos no lo confirman: "El grosor, ¿tiene alguna influencia? *No, no creo. La grande iría naturalmente más lejos, pero como la pequeña va más rápido, al descender se equilibran.*" Pasa entonces a las variaciones de inclinación, luego se propone "*tomar la misma inclinación y hacer salir* (la bola) *desde más arriba*". Después hace variar ambas al mismo tiempo y descubre la compensación: "*Ahora varía la altura* (o sea, la inclinación) *y la distancia:*

¡todo se equilibra! Y con variaciones muy fuertes. ¿Obtendrá usted algo? *Sí* (ensayos). *Me hace pensar que debe salir siempre a la misma altura, a la misma horizontalidad* (por lo tanto ¡la altura es independiente de la inclinación y la distancia!) ¿Está usted seguro, o es una hipótesis? *Cualquiera sea la pendiente, una bola grande o pequeña llega* (en el mismo casillero al partir) *a la misma altura.*" Concibe una experiencia de control que consiste en tomar la misma altura para inclinaciones de 3 y 9: "*¡Estos sí son extremos!*"

How (16;4) comienza por descartar la hipótesis del peso: "*Pensaba que la diferencia de peso habría cambiado la distancia* (o sea, la longitud del salto)." Luego, estudia el papel de la inclinación y después el de la distancia ("*la bola tiene que salir de más abajo*", etcétera). Después de esto comprueba la posible compensación: "*Si se alza* (la deslizadera) *hay que partir de más abajo.*" Por último, se le pide que formule la ley: "*Depende de dónde salga la bola. La línea es constante, pero el ángulo cambia.* ¿Qué línea? (Muestra los indicadores que permiten determinar horizontalmente las alturas comunes para las diferentes inclinaciones.) *Este punto de partida de la bola es constante.* ¿Qué es lo constante? *La altura.*"

La diferencia inicial que separa a estos sujetos del subestadio III B de los casos del nivel intermedio III A reside, como siempre, en el esfuerzo realizado para disociar los factores. Además de las razones habituales, los sujetos del nivel III A fallan en la disociación en este caso particular por dos razones suplementarias. Primero porque a inclinación igual, la distancia y la altura varían juntas: por lo tanto los sujetos no establecen la diferencia entre estos dos factores y, por lo general, llaman "más alto" o "más bajo" aquello que en realidad miden como distancia de recorrido sobre el plano inclinado (véase Rou y Stro). De este modo, piensan que toman en cuenta la altura cuando en realidad no la constituyen como una relación distinta. En segundo lugar, al comprobar que la distancia y la inclinación se compensan, se limitan a la comprobación de su covariancia en el interior de esta compensación, sin buscar el invariante resultante puesto que, para ellos, este invariante de altura se confunde en parte con la distancia misma. Por el contrario, los sujetos del nivel III B buscan disociar los factores mediante su método habitual de variación sucesiva de cada uno de los factores, permaneciendo inmodificados los otros. En este caso particular en el que se presenta una compensación de la inclinación y la distancia, hacen variar aparte ambas relaciones antes de hacerlas variar juntas (véase Sal: "tomar la misma inclinación y hacer salir desde más arriba", luego "ahora varía la altura y la distancia"). Esto les permite por último disociar de modo nítido los tres factores y no sólo dos como sucedía hasta entonces: la inclinación, la distancia y la altura como tal. Además, como las dos primeras se compensan, enseguida buscan el invariante que supone este mecanismo compensatorio y no se satisfacen ya con simples covariancias.

¿Cómo logran entonces decidir que la altura constituye este invariante y no los otros dos factores? Sin duda alguna por la experiencia; sin embargo, hay una deducción previa, como lo muestra Sal, y precisamente a partir de la compensación: si se conserva una misma inclinación, la distancia y la altura aumentan o disminuyen al mismo tiempo; y cuando se conserva una misma distancia, la inclinación y la altura varían en el mismo sentido; por el contrario, cuando se conserva la altura, aumenta la inclinación y la distancia disminuye, o recíprocamente, de tal modo que la altura —producto de la compensación— es al mismo tiempo el invariante que se postula para explicar las identidades de efectos a pesar de las modificaciones de los otros dos factores. "Cualquiera sea la pendiente" —dice Sal— hay que buscar "la misma altura" y todavía de modo más enérgico How afirma que "la línea (de altura) es constante" mientras que "el ángulo cambia". Tales parecen ser las razones del descubrimiento del factor altura y a la vez lo que explica su aparición tardía.

Si buscamos analizar los razonamientos de estos adolescentes comprobamos, en primer lugar y como de costumbre, que entre las combinaciones posibles se eligen las verdaderas. Además, como el sujeto no realiza cálculo trigonométrico alguno sino que se limita a observar las covariaciones de los factores entre sí y las de los factores y el resultado experimental, estas combinaciones se referirán tanto a estas covariaciones como al efecto producido (aquí reside la originalidad de la presente situación respecto de las de los capítulos III y IV).

Llamemos p_0 al enunciado de una conservación de la inclinación y $\bar{p}_0$ al del cambio de este factor; llamemos q_0 y $\bar{q}_0$ a los mismos enunciados que se refieren a la distancia; r_0 y $\bar{r}_0$ los mismos referidos a la altura; por último designemos con x_0 y $\bar{x}_0$ a los enunciados que afirman o niegan la invariancia en el resultado obtenido (longitud del salto de la bola).

Las combinaciones verdaderas que el sujeto comprueba, desde el punto de vista de la invariancia o de las variaciones de los factores en relación unos con otros son entonces las siguientes:

1) $(p_0\, q_0\, r_0) \vee (p_0\, \bar{q}_0\, \bar{r}_0) \vee (\bar{p}_0\, q_0\, \bar{r}_0) \vee (\bar{p}_0\, \bar{q}_0\, r_0) \vee (\bar{p}_0\, \bar{q}_0\, \bar{r}_0)$

En efecto se excluyen: $\bar{p}_0\, q_0\, r_0$ (cuando la inclinación varía, pero no la distancia, la altura no permanece constante), $p_0\, \bar{q}_0\, r_0$ (recíprocamente si la distancia varía sin la inclinación, la altura también cambia) y $p_0\, q_0\, \bar{r}_0$ (ya que si la inclinación y la distancia no cambian, la altura no podría variar).

Ahora bien, de estas combinaciones (1) resulta una doble consecuencia obtenida correctamente por el sujeto gracias a un juego de disyunciones:

2) $[\bar{r}_0 \supset (\bar{p}_0 \vee \bar{q}_0)] \vee [r_0 \supset (p_0\, q_0) \vee (\bar{p}_0\, \bar{q}_0)]$

vale decir que una modificación de la altura (del punto de partida de la bola) supone una modificación de la inclinación, de la distancia, o de

ambas, mientras que el mantenimiento de la misma altura supone o un cambio simultáneo de la inclinación y la distancia, o una conservación de la misma inclinación y la misma distancia.

Resulta claro que se tiene también:

3) $[\overline{p}_0 \supset (\overline{q}_0 \vee \overline{r}_0)] \vee [p_0 \supset (q_0\, r_0) \vee (\overline{q}_0\, \overline{r}_0)]$

y

3 bis) $[\overline{q}_0 \supset (\overline{p}_0 \vee \overline{r}_0)] \vee [q_0 \supset (p_0\, r_0) \vee (\overline{p}_0\, \overline{q}_0)]$

Ahora bien, el sujeto formula la hipótesis de que la altura $(r_0 \vee \overline{r}_0)$ desempeña el papel causal y no los otros dos factores posibles. La razón de ello reside en que las 3 implicaciones $r_0 \supset (p_0\, q_0) \vee (p_0\, \overline{q}_0)$; $p_0 \supset (q_0\, r_0) \vee (\overline{q}_0\, \overline{r}_0)$ y $q_0 \supset (p_0\, r_0) \vee (p_0\, \overline{r}_0)$ contenidas en las expresiones (2), (3) y (3 bis) ya no son isomorfas si se toma en cuenta la dirección (del signo) de los cambios en juego. Descompongamos pues las proposiciones p_0; $\overline{q}_0$ y $\overline{r}_0$ en dos parejas de proposiciones que llamaremos: p, q y r cuando enuncien respectivamente un aumento de inclinación, de distancia y altura; $\overline{p}$, $\overline{q}$ y $\overline{r}$ cuando enuncien respectivamente disminuciones de estos factores. Entonces, se tiene:

4) $p_0 \supset [(q \cdot r) \vee (\overline{q} \cdot \overline{r}) \vee (q_0\, r_0)]$
$q_0 \supset [(p \cdot r) \vee (\overline{p} \cdot \overline{r}) \vee (p_0\, r_0)]$
$r_0 \supset [(p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (p_0\, q_0)]$

vale decir que la conservación de la altura r_0 puede asegurarse mediante las compensaciones $(p \cdot \overline{q})$ o $(\overline{p} \cdot q)$ como mediante la ausencia de cambio $(p_0\, q_0)$, lo que no sucede en el caso de p_0 ni de q_0.

El sujeto formula entonces la siguiente hipótesis (véase Sal):

5) $r \underset{C}{\supset} x$ o $(\overline{r}_0 \underset{C}{\supset} \overline{x}_0)$

lo que equivale a decir que siempre se tiene o $\overline{r}_0\, \overline{x}_0$ o $r_0\, x_0$ (cambio de altura y resultado o conservación de ambos).

La experiencia da entonces las combinaciones verdaderas:

6) $(p_0\, q_0\, x_0) \vee (p_0\, \overline{q}_0\, \overline{x}_0) \vee (\overline{p}_0\, q_0\, \overline{x}_0) \vee (\overline{p}_0\, \overline{q}_0\, x_0) \vee (\overline{p}_0\, \overline{q}_0\, \overline{x}_0)$

En efecto, se excluyen las combinaciones siguientes: $\overline{p}_0\, q_0\, x_0$ ya que el cambio de inclinación sin modificación de la distancia transforma a la altura y no conduce al mismo resultado x_0; $p_0\, \overline{q}_0\, x_0$ (ya que recíprocamente $p_0\, \overline{q}_0$ implica un cambio de altura) y $p_0\, q_0\, \overline{x}_0$ (ya que la conservación de la inclinación y la distancia no puede implicar el cambio $\overline{x}_0$).

Como las combinaciones verdaderas (6) coinciden de este modo con las combinaciones (1), se verifica pues el papel de la altura como factor único, necesario y suficiente. En efecto, debe señalarse que los sujetos mencionados no se contentan con controlar el resultado de las variaciones de altura $(\overline{p}_0\, \overline{q}_0\, \overline{x}_0)$ o $(\overline{p}_0\, q_0\, \overline{x}_0)$ o $(p_0\, \overline{q}_0\, \overline{x}_0)$, sino que establecen como contraprueba la validez de la combinación $(\overline{p}_0\, \overline{q}_0\, x_0)$. El sujeto Sal incluso varía sus inclinaciones de 3 a 9 y concluye: "¡Estos sí son extremos!"

CAPITULO VI

PAPEL DE LA IMANTACION INVISIBLE

y las dieciséis operaciones proposicionales binarias [1]

Los capítulos I a V nos permitieron asistir a una gradación en las dificultades vencidas mediante el método combinatorio inherente al pensamiento formal y a la lógica de las proposiciones del adolescente. Para terminar esta primera parte, vamos aún a examinar de modo sucinto un problema bastante simple, ya abordado en una de nuestras obras anteriores,[2] pero que nos servirá para mostrar de qué modo los sujetos del estadio III utilizan las disyunciones y exclusiones en solidaridad con el conjunto de las operaciones binarias: se trata sin más de determinar por qué una barra de metal, fija a un disco en rotación se detiene ante un par de cajas, con exclusión de una serie de otras cajas posibles; el par en cuestión contiene imanes disimulados dentro de un pedazo de cera.

§ 1. ESTADIO I: DISYUNCIONES Y EXCLUSIONES PREOPERATORIAS

Resulta inútil volver sobre los sujetos más jóvenes, característicos del nivel I A, que ya hemos descripto en otra parte a propósito de la noción de azar. En el nivel I B, en cambio, ya se encuentra bajo la forma de representaciones intuitivas, un esbozo de lo que llamaremos en el nivel II disyunciones y exclusiones concretas (por ejemplo, "allí o allí", "no es esto", etcétera):

Voi (6;5) piensa que el disco se detendrá en el sector azul *"porque las alas* (o sea, los frenos del disco) *son azules"* y como se detiene en el verde (se colocan momentáneamente las cajas con los imanes sobre los sectores verdes del platillo dividido en sectores con distintos colores y superficies iguales), explica que *"el verde pega con el amarillo"* (las cajas son amarillas). Luego prevé *"en el verde, porque siempre se detiene en el verde"*. Abre las cajas imantadas: *"Hay cera"*,

[1] Con la colaboración de M. Denis-Prinzhorn.
[2] Piaget e Inhelder, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, cap. III.

pero no descubre que este hecho constituye la explicación y agrega: *"Tampoco es por eso* (los dibujos sobre las cajas)." Se colocan los imanes sobre el rojo: "¿Dónde se detendrá? *No sé: allí o allí* (rojo o verde)." Por último se limita a la siguiente explicación *"hay algo en las cajas"*, pero sin decir por qué algunas detienen el disco y otras no.

Veb (6;9): *"Quizá, porque hay una estrella* (dibujada sobre la caja de los imanes)." Luego: *"Siempre se detendrá en el rojo.* ¿Por qué? *No sé. Aquí es demasiado pesado* (las alas que sirven de frenos). ¿Qué se podría hacer para ver si en efecto es por eso? *Quitarlas* (así se hace). ¿Dónde va a detenerse? *Sobre lo azul.* (Experiencia: rojo). ¿Era realmente por eso (por las alas)? *No.* Entonces, ¿por qué se detiene aquí? *Porque se empuja muy fuerte* (impulso del disco). Voy a empujar despacio (de nuevo se detiene en el rojo). *¡Ah! ya sé: digo que es demasiado pesado* (abre las cajas y las compara). *Esta es la más pesada* (la caja con estrellas que contiene los imanes; pero en realidad no es la más pesada). ¿Y así (se colocan los imanes en el sector azul y el disco se detiene en este color)? *¡Ah! ya sé, estoy contento porque lo encontré: quizá la estrella es más útil; entonces es más pesada* (o sea, más fuerte) *porque durante la noche ilumina las calles; incluso entre dos casas siempre se ve una estrella.* ¿Pero se trata de una estrella de verdad? *No, es de papel pero tal vez está bien lograda* (!)."

Bajo su forma elemental, lo que se convertirá en la disyunción interproposicional se funda en la comprobación de que dos clases son parcial o enteramente disyuntas. No se necesita poseer ya las operaciones concretas de clases para comprobar, de modo intuitivo, que el disco puede detenerse sobre un color o sobre otro: "Allí o allí" como dice Voi, lo cual constituye la expresión de un comienzo de organización que conduce a la vez al encaje de las clases parciales en una clase total y a la noción de lo posible; quiere decir que el disco se detendrá sobre un color (B) que puede ser verde (A) o rojo (A'), lo que constituye una reunión intuitiva $A + A' = B$ con disyunción (A o A') incluso cuando no se trate aún de operaciones sistemáticas.

En cuanto a la exclusión, se presenta en su forma más tosca como una no correspondencia y, también en este punto, pueden existir correspondencias y no correspondencias intuitivas (fundadas en las configuraciones perceptivas) previas a las correspondencias operatorias (con conservación de las equivalencias cuando hay un cambio de configuración).[3] Ahora bien, cuando Voi rechaza la explicación por el contenido de las cajas (por el hecho de que todas las cajas contienen cera y no sólo las cajas frente a las que el disco se detiene) o por los dibujos que distinguen entre sí a las cajas ("tampoco es por eso") se limita a tomar conciencia de una no correspondencia sin que se produzca una organización detallada de la experiencia. La conducta de Web es más avanzada cuando al preguntarse si la detención se debe al peso de los frenos del disco

[3] Véase, *La genèse du nombre chez l'enfant*, pág. 62, etcétera.

propone quitarlos, lo que constituye un comienzo de verificación, o cuando descarta también otras causas (impulso, etcétera) porque su eliminación no suprime el efecto: ya hay aquí un comienzo de correspondencia, o una comprobación de la no correspondencia, con inversiones de la acción que anuncian la transformación de esta acción en operaciones reversibles. Pero, al final de la interrogación, se ve que esta estructuración naciente no es aún profunda. En primer lugar, cuando busca explicar las detenciones por el peso, no compara entre sí todos los pesos y se contenta con dos o tres comparaciones con resultado erróneo. Luego, y sobre todo, llega a atribuir la detención al dibujo de la estrella, que es útil (o sea, eficaz) y pesada (o sea, fuerte) y, aunque simplemente representada de modo simbólico en el papel, actúa porque está "bien lograda".

§ 2. SUBESTADIO IIA: COMIENZO DE LAS DISYUNCIONES Y EXCLUSIONES CONCRETAS

Con la formación de las operaciones concretas por coordinación reversible de las acciones, los esbozos de disyunciones y exclusiones que acabamos de señalar comienzan a organizarse de modo sistemático en función de las agrupaciones nacientes de clases y relaciones:

Kel (7;3) dice desde el comienzo que el disco puede detenerse *"allí o allí o allí: no se puede saber de antemano"*. Luego, rápidamente comprueba que el disco se detiene siempre en el mismo color (violeta). Se coloca entonces la caja con estrellas en el sector rojo: allí se detiene el disco *"Es porque usted cambió esto* (las alas que sirven de freno al disco: volvemos a empezar). *No, ¡son las cajas! Las estrellas antes estaban sobre el violeta, ahora están sobre el rojo."* Pero se niega a decir más cosas.

Mamb (8;3). En primer lugar: *"Depende de si se da vuelta más rápido o más lentamente."* Durante mucho tiempo se queda aferrado a esta idea: *"Quizá se dio vuelta demasiado fuerte"*, etcétera. Luego como el disco siempre se detiene sobre la estrella afirma: *"Es porque las cajas* (con estrellas) *son más pesadas.* ¿Y éstas (más pesadas aún)? *Quizá son demasiado pesadas, entonces no funciona."*

Ber (9;9): *"Una es liviana, una es pesada, una un poco menos pesada* (comprueba que las cajas con estrellas tienen el mismo peso que las que llevan un redondel, son más pesadas que las que llevan un cuadrado y menos pesadas que las que llevan un rombo). *Sí, tal vez sea por el peso."*[4]

Vog (9;10) pesó todas las cajas: *"el cuadrado es más liviano, luego viene la estrella y el redondel.* Entonces ¿por qué se detiene frente a la estrella? *Porque al lado de la estrella se encuentra el cuadrado que es más liviano."*

[4] Véase, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, casos semejantes, pág. 96 (Dan, Desp y Tos), pág. 97 (Ful) y 100-101.

Ker (10 años) también formula la hipótesis de una *"cuestión de peso en las cajas y el disco"*, y busca conciliarlo todo en el sentido del peso medio, y sobre todo de una disposición de conjunto de los pesos: "¿Quieres ver si está bien? (Compara las cajas iguales: estrellas y redondeles.) *Esta es bastante pesada: tiene el mismo peso que la estrella.* ¿Pero dónde se detiene? *Sobre la estrella.* ¿Entonces se trata del peso? *Sí.* ¿Sin embargo se detuvo sobre el redondel? *No.* ¿Igual crees que se trata del peso? *Seguro que se trata del peso porque está arreglado* (ordenado de cierta manera que va a describir señalando las cajas con el dedo). *Esta* (rombo) *es más pesada. Las dos redondas son del mismo peso; los dos cuadrados también* (pero son más livianos). *Entonces, estoy seguro: se trata del peso.* ¿Cuáles son las más pesadas? (Muestra los rombos.) ¿Entonces se detiene allí? *No.* ¿Y el peso tiene influencia? *Sí, seguro* (piensa en un equilibrio entre todos los pesos, que provoca una detención sobre los pesos medios)."

En efecto, en *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant* se encontrará un cierto número de casos análogos que formulan la hipótesis de que sólo los pesos medios detienen el disco: *"Sólo las medianas detienen"* (*Ful* 8;4): *"Es el peso de estas cajas, porque no son ni demasiado pesadas ni demasiado livianas"* (*Duf* 9;4).

En estos casos se observa una curiosa mezcla de disyunciones y exclusiones (o no exclusiones) concretas, que muestran a la vez los progresos realizados respecto del nivel preoperatorio y la insuficiencia de estas operaciones no formales en oposición con las verdaderas exclusiones de la lógica de las proposiciones.

En cuanto a la disyunción, ya hemos visto antes, a propósito del azar y de los muestreos por azar,[5] de qué modo el niño de este nivel, al extraer elementos de una colección *B*, descubre que puede extraer indiferentemente representantes de la subclase *A* o de la subclase *A'*; en cambio en el nivel anterior el niño por lo general cree que va a extraer uno más que el otro. Este comienzo de disyunción operatoria fundada sobre la estructuración de las clases o de las relaciones vuelve a encontrarse en parte aquí por el modo en que el sujeto hace intervenir el peso. Como está convencido de que la detención del disco sólo puede explicarse en definitiva por el peso y como por otra parte descubre la diversidad de los pesos en juego, supone que el peso puede intervenir de tres maneras: bajo el efecto del más pesado, bajo el efecto del más liviano o bajo el efecto de los valores medios (no "demasiado pesadas", como dice Mamb, o "ni demasiado pesadas ni demasiado livianas" como afirma Duf). Se ve que esta disyunción se funda entonces simplemente en una seriación aproximativa, esto es, en el hecho de que —como lo expresa Ker— "está arreglado" en tres categorías, de lo más a lo menos pesado.

Sin embargo esta fina solución fundada sobre la disyunción de las relaciones presenta un problema delicado en lo que se refiere a la ex-

[5] *Ibid*, pág. 162.

clusión. Que sólo exista correspondencia entre ciertos pesos y la detención del disco, y no entre los pesos progresivos y los grados de frecuencia o precisión de la detención, no conduce al sujeto a la exclusión del factor peso como sucederá a partir del nivel II B: para ellos la ausencia de una correspondencia completa simplemente limita el efecto de este factor ante la acción de un supuesto peso *optimum* que sería el peso medio. ¿Por qué entonces se mantiene esta frágil hipótesis en el nivel II A, mientras que se la rechazará en el II B?

En este sentido se nos ofrece una explicación muy simple que presenta además un cierto interés desde el punto de vista de la psicología de la exclusión. Si los sujetos del nivel II A no excluyen el factor peso por más que no haya correspondencia entre los pesos y las detenciones, mientras que los del nivel II B consiguen la exclusión, es con toda verosimilitud por causa de una situación que estudiamos extensamente en otra parte: [6] en el nivel II A, no hay aún conservación del peso y no se aplica aún a esta noción ninguna de las operaciones concretas de seriación, igualación con transitividad, correspondencia, etcétera, ya adquiridas en muchos otros dominios.[7] En cambio alrededor de los 9-10 años, al comienzo del subestadio II B, todas estas operaciones se constituyen a la vez y aseguran la conservación del peso. Como en el nivel II A el peso no está aún estructurado desde el punto de vista de las operaciones concretas, se lo concibe todavía como una fuerza activa de efectos múltiples y contrarios (comprobamos exactamente los mismos fenómenos en el capítulo II a propósito de la flotación y con las mismas contradicciones) y no puede producir las exclusiones sistemáticas ya que no se halla inserto en el sistema de las operaciones necesarias para el establecimiento de una correspondencia exacta.

En efecto, resulta sorprendente cuando se leen las respuestas de Ber y sobre todo las de Ker, comprobar que reconocieron la igualdad de los pesos entre las cajas que tienen una estrella (o sea, detención del disco) y las que tienen un círculo (no detención), lo que no conmueve en absoluto su creencia en la acción de peso. Pero ello resulta menos asombroso si por un lado los pesos no son para ellos exactamente seriables y si por el otro las igualdades no son transitivas: un peso dado puede en este caso presentar un cierto poder que no por ello poseerá un peso igual. Por su parte, el sujeto Vog, que todo lo pesó, sostiene que la caja con estrellas detiene el disco por causa de su peso medio, pero añade el argumento suplementario de que se encuentra al lado de la caja que lleva el cuadrado y que es más liviana (!). Esta combinación de los dos pesos no tiene entonces todavía nada que ver con una composición operatoria: sólo es un juego de influencias que no puede traducirse en términos de con-

[6] Piaget e Inhelder, *Le développement des quantités chez l'enfant*, caps. II, VI, X y XI.

[7] Se sabe por ejemplo que la seriación de cinco pesos distintos de igual volumen sólo se logra a la edad de 10 años, según los tests de Binet-Simon.

servación. Sucede lo mismo con la acción de conjunto de todos los pesos "arreglados" a la que Ker recurre sin poder por otra parte explicitarlo.

Pero, si la explicación por el peso no provoca exclusión precisa alguna por las razones que acabamos de examinar, los sujetos del nivel II A pueden en cambio producir exclusiones concretas correctas en lo que se refiere a otros factores supuestos: los frenos del disco, el impulso, etcétera. En estos casos la no correspondencia los aleja del engaño de modo más o menos rápido.

§ 3. SUBESTADIO II B: LA EXCLUSION CONCRETA DEL PESO

En el nivel II B la estructuración de las operaciones concretas en lo que concierne al peso mismo (con un retardo de dos o tres años sobre las longitudes y cantidades simples) conduce a los sujetos a adoptar una actitud muy diferente respecto del problema planteado:

Dup (10;9) parte de la hipótesis de que el peso actúa: *"Según como el peso esté colocado, así funciona la cosa.* Esta caja (con imanes) es la más pesada. (Las pesa a todas.) *¡Oh! ¡Es la mediana! La más pesada es el rombo, ésta* (cuadrada) *está vacía y estas dos* (la caja con estrellas que contiene los imanes y la que tiene un círculo) *son iguales* (vuelve a pesarlas), *sí, más o menos."* Coloca entonces de modo espontáneo las cajas que llevan el círculo en el lugar de las que llevan las estrellas, con el fin de verificar, pero el disco se detiene de nuevo ante la estrella: *"No hay nada que hacer, ¡siempre sucede lo mismo! Qué complicado es."* No encuentra otra explicación mejor, pero renuncia sin embargo al factor peso.

San (10;8): "El peso, ¿influye para algo? *¡Oh! no: ésta es más pesada que la estrella* (la caja que contiene a los imanes) *y sin embargo se para en la estrella."*

Pau (11;11): *"El redondel y la estrella tienen el mismo peso, entonces puede caer sobre cualquiera de los dos* (vuelve a experimentar). *Sí, pero hay algo que influye porque siempre cae aquí* (estrellas)." Pesa todas las otras cajas y concluye por medio de un razonamiento que ya presenta la forma hipotético-deductiva: *"Si fuera el peso, debería caer sobre la pesada y no sobre las medianas."*

En estos sujetos se reconoce la acción de las operaciones de seriación o correspondencia serial así como las de igualación con transitividad, recién adquiridas en cuanto al peso: puesto que no hay correspondencia término a término entre los pesos y las detenciones del disco, San y Pau concluyen que el peso no desempeña papel alguno. Por otra parte, puesto que dos pesos iguales no producen el mismo efecto, Dup y Pau también deducen la ineficacia de este factor: ambos se entregan a la contraprueba que consiste en colocar la caja del mismo peso (sin imanes) en

el mismo lugar que la caja con imanes, o sea que repiten la experiencia para comprobar que la detención sólo se produce frente a una de las dos. En resumen, las operaciones concretas, una vez aplicadas de modo sistemático en la estructuración de un dominio particular como el del peso, bastan para asegurar la posibilidad de exclusiones por no correspondencias de relaciones o clases o por no transitividad.

§ 4. ESTADIO III: DISYUNCIONES Y EXCLUSIONES PROPOSICIONALES

Si bien la exclusión del peso ya es posible en el nivel II B mediante las operaciones concretas, las operaciones formales de la disyunción ($p \vee q = p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$) y la exclusión recíproca ($p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$) o simple ($p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$) no por ello dejan de presentar nuevas ventajas. En primer lugar, porque implican una cierta variedad de disyunciones o exclusiones posibles y sobre todo porque sitúan estas diversas posibilidades en el conjunto de las combinaciones del sistema y así conducen, por efecto de su misma combinatoria, a la determinación de las implicaciones y no implicaciones o incompatibilidades. Analicemos en este sentido un caso sobre el que uno de nosotros volverá desde el punto de vista de la táctica de la inducción:

Gou (14;11): "*Puede ser que descienda y aquí es más pesado* (el peso haría inclinar al plano, de ahí la dirección de detención hacia abajo) *o tal vez haya un imán* (coloca un cuaderno bajo la plancha para que quede horizontal y comprueba que el resultado es el mismo). ¿Qué prueba esto? *Hay un imán* (pesa las cajas). *Hay unas que son más o menos pesadas. Pienso que es más bien el contenido en sustancia.* ¿Qué hay que hacer para probar que no es el peso? Quita los rombos (los más pesados). *Cambié las posiciones, entonces si esto vuelve a pararse en el mismo lugar, el peso no desempeña ningún papel. Pero más bien voy a quitar las estrellas: veremos si esto se detiene sobre las otras que son más pesadas.* (Experiencia.) *No se trata del peso. No es una prueba rigurosa, porque no forma una perpendicular* (con las cajas con rombo). *El peso podría tener una influencia solamente si hay que inclinar. Entonces coloco dos cajas una sobre la otra y si no se detiene es porque el peso no tiene importancia.* (Experiencia negativa.) *Esto es.* ¿Y el color? No, *se vio al cambiar las cajas de lugar. La sustancia que está en las cajas tiene una influencia, pero sobre todo se trata del acercamiento de las cajas: estas cajas sólo actúan si están cerca* (aleja la mitad de las cajas). *Es o la distancia o el contenido. Para ver si es el contenido hago esto* (aleja las estrellas y acerca las otras cajas). *Cae justo entre los redondeles cercanos y las estrellas alejadas. Las dos cosas tienen influencia y es la resultante de las dos fuerzas* (experiencias que alejan sucesivamente la estrella). *Más bien se diría que es la distancia* (nuevo ensayo). *Parece confirmarse pero no es demasiado seguro. A menos que sean los puntos cardinales* (quita las estrellas). *No, no es esto. Las estrellas tienen influencia: se debe forzosamente al contenido. Si no es un imán, no veo qué puede ser. Hay*

que poner hierro sobre las otras cajas: si el imán está allí (disco) *se parará en estas cajas. Si está en las cajas* (estrellas) *hay hierro bajo el disco* (quita las cajas con estrellas). *Creo que son las cajas.*"

Vemos la gran diferencia entre un sujeto que utiliza la combinatoria formal y que por lo tanto sólo experimenta después de una deducción a partir de hipótesis previas y los sujetos del nivel II B que se limitan a utilizar las correspondencias seriales o las igualdades transitivas. Gou también formula la hipótesis del peso: pero razona según el modo de acción eventual que tendría el peso si ejerciera una influencia (hacer inclinar el dispositivo) y a partir de ello se le ocurre no sólo verificar la horizontalidad del plano, sino también superponer dos cajas para obtener un peso superior.

Las operaciones que emplea Gou pertenecen a un orden proposicional y ya no al orden concreto, y sobre todo recurren al conjunto de las 16 combinaciones binarias mediante un pasaje continuo de una a otra, lo que muestra de un modo particularmente claro su solidaridad constante. Así pueden distinguirse en los propósitos precedentes:

1) La disyunción $(p \vee q) = (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (p \cdot q)$ "es o la distancia o el contenido (o ambos)";
2) Su inversa, la negación conjunta $(\overline{p} \cdot \overline{q})$: al cambiar la posición de las cajas se verifica que no se trata ni del peso ni del color;
3) La conjunción $(p \cdot q)$: el contenido y la distancia tienen ambos influencia;
4) Su inversa, la incompatibilidad $(p / q) = (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$: la acción del imán es incompatible con el alejamiento, ya que sólo se observa la detención sin el alejamiento, el alejamiento sin detención, o ni lo uno ni lo otro;
5) La implicación $(p \supset q) = (p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$: si el imán está fijo al disco se detendrá ante las cajas que llevan hierro;
6) Su inversa $(p \cdot \overline{q})$: la ausencia de detención prueba la no implicación;
7) La implicación conversa $(q \supset p) = (p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$: si el imán está en la caja, el disco se detendrá;
8) Su inversa $(\overline{p} \cdot q)$ interviene en 1), 4), 10), etcétera;
9) La equivalencia $(p = q) = (p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$: afirmar la influencia del peso equivale a afirmar que la detención del disco se debe a una inclinación;
10) Su inversa, la exclusión recíproca $(p \vee\!\vee q) = (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q)$: la horizontalidad del dispositivo excluye el factor peso, ya que se tiene horizontalidad y no influencia del peso o influencia del peso y no horizontalidad;
11) Independencia de p respecto de q o sea $p\,[q] = (p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q})$: la detención puede coincidir con un color, pero también con su ausencia, lo cual excluye el factor color;

12) Su inversa (que también es su recíproca) $\overline{p}\,[q] = (p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$: la ausencia de detención puede coincidir también con este color y con su ausencia;
13)-14) Independencia de q y de $\overline{q}$ respecto de p o sea $q\,[p]$ y $\overline{q}\,[p]$: estas operaciones intervienen en 15);
15) Afirmación completa o tautología $(p * q) = (p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q})$: todas las combinaciones posibles, por lo tanto, ausencia de vínculos particulares por ejemplo entre la caja que contiene el imán y el sector coloreado sobre el que se la coloca;
16) Su inversa, la negación completa o contradicción (o): habría contradicción en el caso de negar el papel del peso y restablecerlo luego.

Se ve que no es exagerado otorgar a un sujeto del nivel III B, como Gou, la posibilidad de jugar alternativamente con las 16 combinaciones binarias de la lógica de las proposiciones ya que de cada una de ellas acabamos de dar un ejemplo extraído de los propios enunciados de este sujeto. Sin duda, en el nivel III A, el repertorio no es aún completo (para ejemplos de este subestadio intermedio, véase nuestro estudio anterior acerca de este problema de los imanes).[8] Pero cuando se logra el equilibrio de las operaciones formales, la combinatoria propia del "conjunto de las partes" proporciona su pleno rendimiento y el sujeto ya no se satisface con razonamientos fundados sobre las simples correspondencias concretas. Por ejemplo, después de comprobar la no correspondencia de las detenciones con el peso Gou piensa que no es una prueba suficiente ("rigurosa") porque si el peso actuase produciendo una inclinación del dispositivo, podría combinarse con otros factores.

En resumen, incluso en un caso tan simple como el de esta experiencia (y por ello hemos elegido esta investigación para concluir la Primera Parte de esta obra), el pasaje de las operaciones concretas a las operaciones formales se halla marcado por la entrada en juego de una combinatoria completa, con su variedad de disyunciones y exclusión aliadas siempre a las implicaciones. Esta combinatoria es la que confiere a las reacciones del sujeto en el detalle mismo de sus experimentaciones, esta nueva fisonomía hipotético-deductiva ausente entre los niños más avanzados de los niveles II A y II B.

[8] *La genèse de l'idée de hasard*, págs. 101-106.

SEGUNDA PARTE

LOS ESQUEMAS OPERATORIOS DE LA LOGICA FORMAL

Las transformaciones del pensamiento que caracterizan los comienzos de la adolescencia durante nuestro estadio III (sobre todo en el nivel III B) no se reducen en absoluto a la formación de las operaciones proposicionales de las que acabamos de ver un ejemplo a propósito de las 16 operaciones binarias (después de haber analizado ejemplos más complicados que hacían intervenir las operaciones ternarias, etcétera). Por el contrario, el gran interés de los hechos psicológicos que pueden analizarse con respecto al desarrollo de los razonamientos experimentales reside en mostrarnos que, en estrecha relación con esta constitución de la lógica de las proposiciones, aparece un cierto número de operaciones y nociones nuevas, cuya comprensión supera las capacidades del nivel concreto, todas ellas emparentadas no con las operaciones proposicionales como tales sino con las transformaciones operatorias que implican las estructuras de conjunto ("grupos" y "reticulados") características de esta lógica.

Hasta ahora comprobamos que la lógica de las proposiciones siempre es solidaria de una combinatoria fundada sobre el "conjunto de las partes" en oposición con los encajes simples que componen las "agrupaciones" de clases y relaciones de la lógica concreta. Ahora bien, este "conjunto de partes" y la combinatoria que supone, constituyen estructuras más complejas que, a la inversa de estas agrupaciones elementales, fusionan en un único todo los dos grandes modos de reversibilidad: la inversión (o negación), característica de los "grupos" y la reciprocidad (o simetría) característica de los "reticulados". Las operaciones o nociones nuevas a las que acabamos de referirnos y que vamos a estudiar en esta Segunda Parte, presentan entonces el carácter común de versar sobre las propiedades específicas de estas estructuras de conjunto como tales, vale decir a sus transformaciones generales y ya no sólo a las operaciones particulares que permiten engendrar.

Designaremos pues con la expresión "esquemas operatorios", en oposición con las operaciones particulares analizadas en la Primera Parte, a estas operaciones y nociones nuevas relativas a las transformaciones de con-

junto del sistema. En primer lugar, se tratará de las operaciones combinatorias mismas, concebidas ahora no bajo su aspecto exclusivamente proposicional sino bajo su forma general. Luego se tratará de las nociones relativas a la inversión y reciprocidad, que se manifiestan en todos los problemas que se refieren a la noción física de equilibrio o de acción y reacción. Por otra parte, se tratarán algunas nociones de conservación, cuyo descubrimiento requiere el empleo del pensamiento formal. Se analizarán también las nociones de proporciones, cuya forma matemática deriva de una forma lógica y cualitativa más general. Por último, se tratarán las nociones de correlación, cercanas en cierto sentido a la de proporción. En resumen, se analizará un conjunto de esquemas cuyo doble carácter reside en el hecho de que para constituirse suponen el razonamiento formal pero que también derivan de los caracteres más generales de las estructuras de las que procede este mismo pensamiento formal.

CAPITULO VII

COMBINACIONES DE CUERPOS QUIMICOS INCOLOROS O COLOREADOS [1]

La constitución de una combinatoria tal como la vimos repetidas veces condiciona la formación de la lógica de las proposiciones que marca la aparición del pensamiento formal. Esa combinatoria, necesaria para la construcción de un "conjunto de partes", se manifiesta por la posibilidad de vincular de todos los modos posibles las asociaciones o correspondencias de base con el fin de extraer las relaciones de implicación, disyunción, exclusión, etcétera, que se constituyen mediante estas vinculaciones. Y, en efecto, enfrentados con un problema de inducción ante el cual los sujetos del estadio concreto II se limitan a clasificaciones, seriaciones, igualaciones y correspondencias, los adolescentes del nivel III B combinan entre sí todos los factores conocidos según todas las relaciones posibles. Hasta ahora todos los problemas que se les presentaron a los sujetos ponían en juego factores cualesquiera, que podían disociarse y combinarse entre sí a voluntad o simplemente establecerse en correspondencias sin superar el nivel de la observación o experiencia "bruta". Entonces puede uno preguntarse qué sucedería si el problema planteado tuviera que ver directamente con combinaciones, esto es, con elementos o factores que deben forzosamente combinarse entre sí para obtener un resultado visible. ¿Veremos acaso que los sujetos del nivel II B, e incluso los del II A, descubren un sistema combinatorio, en función de las necesidades de la experiencia, hecho que demostraría la independencia de esta combinatoria en relación con la lógica de las proposiciones, o bien por el contrario, que debe esperarse el estadio formal para constituir esta combinatoria experimental, porque los niños del estadio II sólo logran establecer algunas combinaciones empíricas con ausencia de sistema de conjunto, tal como lo comprobamos al estudiar la formación de las operaciones matemáticas de combinaciones, permutaciones y arreglos? [2]

[1] Con la colaboración de M. G. Noelting, doctor en química y asistente en psicología.

[2] *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, caps. VII a IX.

En este sentido la mejor técnica consistió en hacer combinar entre sí diversos cuerpos químicos. Se le presentan al niño 4 frascos semejantes que contienen líquidos incoloros, inodoros, idénticos a la percepción. Los numeraremos: 1 = ácido sulfúrico diluido; 2 = agua; 3 = agua oxigenada; 4 = tiosulfato. Se le muestra además una botella con un cuentagotas, que llamaremos g y que contiene ioduro de potasio. Se sabe que el agua oxigenada oxida al yoduro de potasio en medio ácido. La mezcla 1 + 3 + g dará pues un color amarillo. El agua (2) es neutra y su adición no cambia el color. En cambio el tiosulfato (4) decolora la mezcla (1 + 3 + g). El experimentador presenta dos vasos al sujeto: uno contiene (1 + 3), el otro contiene (2). Frente al niño vierte algunas gotas g en cada uno de los dos vasos y hace notar las diferentes reacciones. Entonces simplemente se le pide al niño que produzca de nuevo el color amarillo utilizando a voluntad los frascos 1, 2, 3, 4 y g.

Una segunda experiencia consistió en utilizar combinaciones no entre sustancias solas, sino entre ciertas sustancias y un indicador. Sea *Ac* = una probeta de ácido sulfúrico N/4; *B* = una probeta de soda cáustica N/4; *E* = tres vasos de agua pura e *Ind* = un poco de fenolftaleína en otros tres vasos de agua. Se tienen entonces las siguientes combinaciones:

(Ind × B) = rosado (E × Ac) = incoloro (E × Ind) = incoloro
(Ind × Ac) = incoloro (Ind × B × Ac) = incoloro (B × Ac) = incoloro
(E × B) = incoloro (Ind × B × E) = rosado

Prácticamente las combinaciones ternarias son raras y sólo sirven como contraprueba para los adultos: no son necesarias para la producción del color. En cuanto a la combinación (*B* × *Ac*) se excluye en la práctica puesto que se trata de dos probetas.

El resultado obtenido por medio de estas dos experiencias consiste en una combinatoria sistemática que sólo aparece en el nivel III A. En el subestadio II A el sujeto se limita a multiplicar todos los factores 1-4 por g. En el nivel II B se asiste a un comienzo de combinación mediante tanteos, pero sin método sistemático.

§ 1. ESTADIO I: ASOCIACIONES EMPIRICAS Y EXPLICACIONES PRECAUSALES

Los sujetos del nivel preoperatorio se limitan a asociar al azar dos elementos a la vez y en explicar el resultado obtenido por un simple fenomenismo o por otras formas de causalidad prelógica:

Nod (5;5): "(Ind × B) *¡Jarabe!* (Ind × Ac) *Agua.* ¿Podemos de nuevo obtener jarabe? *Sí, hay que hacer así* (sacude el agua, luego vuelve a combinar Ind × B). *De nuevo hay jarabe.* ¿Podemos obtener agua de nuevo? *Sí* (Ind × Ac). *De nuevo es agua.* ¿Por qué? *El jarabe se fue allí* (muestra una botella de anaranjado de metilo que se encuentra a 1 m de distancia."

Mam (5;9): "(Ind × B) *Es como vino.* (Ind × Ac) *Es como agua.* ¿Hay color? *Descendió al fondo, se fue así no más* (gesto, luego Ind × B). *Rojo* (Ind × Ac). *El rojo se desliza en el vaso. El color desapareció en el fondo. No se ve más. Se derritió.*"

Eg (6;6): "(Ind × B) *Se volvió rosa. Tal vez hay pintura en el vaso* (Ind × Ac). *Tal vez el pedazo se derritió. Tal vez se colocó una pintura muy chata en el vaso.* (Ind × B) *Rosa: tal vez el agua se transforma: tal vez es en la superficie del agua donde se transforma.* (Ac × Ind × E) *Tal vez cuando se tomó agua blanca en el tubo, hay una barrera que la detiene y sólo corre el agua rosa.*"

Ar (6;9): "(Ind × B) *Aquí se coloca agua roja adentro.* (Ac × Ind) *No puede volverse roja porque el rojo se fue a aquella agua* (la primera). (B × Ind) *Se forma, toma color. Puede volver mejor en esta agua que en aquélla.* (E) *No puede volver más aquí* (E) *porque es el mismo color pero no es la misma agua.*"

Ese modo de pensamiento preoperatorio no conoce ni la prueba y ni siquiera la formulación de hipótesis. Las aparentes hipótesis de Eg, "tal vez" sólo son ficciones, puesto que no se refieren a una verificación y sólo reemplazan o completan lo real mediante representaciones imaginarias. Como esas representaciones no se hallan insertas en un contexto de acciones precisas siguen siendo precausales: el color es como un principio vivo que emana del agua (el agua es la que "se transforma"), pero puede irse, descender al fondo, "achatarse" hasta volverse invisible, volar a un frasco que se halla a un metro de distancia; también puede "volver" pero más en algunas aguas que en otras, o bien cuando se sacude convenientemente el agua recalcitrante (Nod).

§ 2. SUBESTADIO II A: MULTIPLICACION DE LOS FACTORES POR "G"

Resulta interesante comprobar hasta qué punto la actitud espontánea, cuando aparecen las operaciones concretas, corresponde a la asociación sistemática del elemento g con todos los demás (en el caso de la experiencia I), pero sin ninguna otra combinación. Cuando se le sugiere al sujeto que combine varios factores a la vez se provocan algunos tanteos empíricos pero que no se acompañan con consecuencia alguna:

Ren (7;1) prueba con 4 × g, luego con 2 × g, 1 × g y 3 × g: "*Creo que las hice todas.* ¿Qué más podrías hacer? *No sé.*" Vuelven a ordenarse los vasos: empieza de nuevo, 1 × g, etcétera. "¿Tomaste cada botella por separado? ¿Qué otras cosas podrías hacer? *Tomar dos botellas a la vez* (prueba con 1 × 4 × g, luego 2 × 3 × g, por lo tanto, los dos conjuntos no se cruzan, si lo hicieran se obtendría 1 × 2; 1 × 3; 2 × 4 y 3 × 4)." Como se le sugiere que ponga más cosas, agrega 1 × g al vaso que ya contiene 2 × 3, y así obtiene el color:

"Intenta obtener de nuevo el color. *Cuántos puse, ¿dos o tres?* (intenta con 2 × 4 × g, luego añade 3; luego con 1 × 4 × 2 × g). *No, no me acuerdo más*", etcétera.

Gay (7;6) él también se limita de modo espontáneo a 4 × g, 1 × g, 3 × g y 2 × g y no encuentra nada más. "¿Podrías intentar con dos botellas juntas? (Silencio.) Inténtalo. (4 × 1 × g) *No funciona.* Intenta otra cosa. (3 × 1 × g) *¡Ya está!* Y éste (2) ¿te parece que también dará amarillo? (No prueba.) ¿Cómo se obtiene el color, con los tres juntos o sólo con dos? *Acá* (núm. 3) ¿Y acá? *No hay color.* ¿Y acá? (g) *Sí, está adentro.* Entonces (1) y (3) ¿para qué sirven? *No hay color.*"

Im (7;6) comienza del mismo modo con 4 × g, 2 × g, 3 × g y 1 × g pero como no sucede nada agrega unas gotas a 3 × g y luego a toda la serie. Después de esto (fenómeno nuevo) mezcla los cuatro juntos pero en el orden 3 × 2 × 1 × 4 y cada vez vierte las gotas: *"No vino. Volvió a irse* (hay color después de 3 × 2 × 1 × g, pero no se detuvo en ese punto y el color desapareció al poner 4). ¿Qué cosa provocó su desaparición? *Porque puse demasiada agua* (o sea, del líquido de las cuatro botellas). Vamos a quitar esta botella (4). Vuelve a empezar. (Vuelve a hacer la mezcla total sin comprender que se le ha sugerido la exclusión.) *No volvió porque puse demasiado líquido.*"

Cur (8;11) procede del mismo modo uno a uno con g: *"No hay nada. No se puede, a menos que se ponga todo en el mismo vaso."* Mezcla los cuatro sin éxito, luego formula la hipótesis no de que colocó demasiadas cosas sino de que había que elegir otro orden: *"No pasó nada. Tenía que empezar con éste* (2)." Lo hace pero como no sólo no domina las combinaciones sino que tampoco domina las operaciones de permutaciones sigue el orden 2, 3, 4, 1, g, luego adopta un orden cualquiera: *"No viene, porque lo hice al revés...* Luego y por último (siempre con la intención de colocar los cuatro) sigue el orden 1 × 2 × 3 × g: *"¡Se vuelve amarillo!"* Pero enseguida añade el (4) y tiene que volver a empezar todo de nuevo. "Coloca la menor cantidad de cosas posibles. *La menor cantidad posible, entonces dos.*"

El interés de las reacciones de este estadio reside pues en el hecho de que estos sujetos que poseen las operaciones de multiplicación lógica de correspondencia biunívoca no por ello llegan a la idea de construir combinaciones dos a dos o tres a tres, etcétera.

Desde el punto de vista de las operaciones de combinaciones, las únicas reacciones espontáneas del sujeto consisten en la asociación de cada una de las botellas —(1) a (4)— con el cuentagotas g, o bien en la combinación simultánea de las cuatro. Ahora bien, de algún modo se trata en ambos casos de combinaciones, pero sólo de esas combinaciones elementales y limitadas que intervienen en las "agrupaciones" de multiplicaciones de clases y relaciones (vale decir, asociaciones o correspondencias entre un término y cada uno de los otros o entre un término y todos los otros). Incluso cuando comprueba el fracaso, si el experimentador no se

lo sugiere, el sujeto no logra formar las combinaciones dos a dos. Por el contrario, las dos hipótesis que formula son de naturaleza simplemente cuantitativa ("demasiada agua"; o no bastante, de donde surge una nueva distribución de las gotas) o relativa al orden (Cur). Ahora bien, ese recurso al orden también se inspira en una estructura de agrupación, puesto que la seriación —adquirida desde los 7 años— se funda en el orden. Pero de nuevo aquí la reacción del sujeto consiste simplemente en la introducción de un solo cambio de orden, o en la inversión del orden adoptado, y no en la búsqueda de todos los órdenes posibles como lo supondría la operación combinatoria de las permutaciones. En resumen, no existe aún operación combinatoria alguna en sentido estricto, sino sólo correspondencias y seriaciones, vale decir, combinaciones de primera potencia referidas a encajes fijos.

Otro punto interesante consiste en que el sujeto, en presencia del color formado, sabe que el líquido (4) es "un agua que quita el color". Pero cuando se halla en camino de reunir los 4 elementos $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times g$ y que el color que, por un momento, apareció desaparece por la influencia de g, ya no piensa en una exclusión posible entre (4) y el color y simplemente afirma que éste volvió a irse por diversas causas.

En este sentido debe además señalarse, ya que ello presenta un cierto valor de índice desde el punto de vista de la oposición entre las estructuras no combinatorias y combinatorias, que al niño de este nivel no se le ocurre atribuir el color a la reunión de varios elementos, sino sólo a tal o cual elemento considerado en sí mismo, se halle o no combinado con los demás. Por ejemplo Gay piensa que el color se encuentra en (3), luego deja de pensarlo y se lo atribuye a g como si pudiera vincularse únicamente con uno solo de estos líquidos.

La diferencia entre la experiencia de los indicadores y la experiencia de las soluciones reside en que las combinaciones de dos en dos bastan para establecer una clasificación completa de los casos que producen el color (base $B \times Ind$) o que no lo producen (los otros tres). La operación concreta de la multiplicación lógica ¿proporciona entonces de suyo la solución del problema? Sucede algo interesante: ella basta para encontrar la ley (casos favorables y desfavorables), pero no basta para explicarla, precisamente en virtud de lo que acabamos de ver a propósito del color atribuido a un líquido único.

En el nivel II A los elementos de este segundo dispositivo dan lugar a las siguientes asociaciones. En ciertos casos los vasos (E e Ind concebidos como idénticos) se asocian sucesivamente con la base B y con el ácido Ac. Pero se obtiene a menudo, a partir de los 7 años, cuadros con 4 casilleros completos: $(B \times Ind) + (B \times E) + (Ac \times Ind) + (Ac \times E)$ que permiten entonces descubrir la ley:

Sehne (7;5) asocia (Ind × B) = rosa; (Ind × Ac) = incoloro; (E × B) = = incoloro: *"Ya no hay más rosa"*; de nuevo (E × B): *"El rosa ya no vuelve"*; (Ind × B): *"Rosa de nuevo.* ¿Se puede quitar el rojo? *Se pone un poco de blanco*

(asocia Ind × Ac y E × Ac). ¿Estos cuatro vasos (E e Ind) son los mismos? *No*... *Sí* (prueba con Ind × B y E × B). *No.* ¿Por qué? *Unicamente se produce en dos vasos. Estos dos son rosas y estos dos blancos* (justo). ¿Y las probetas? *No, aquí rosa* (B) *y aquí blanco* (Ac). *¿Puedes quitar el rosa de este vaso* (Ind × B)? *Sí* (vierte ácido)."

Pero esas operaciones multiplicativas difieren sin embargo de las reacciones combinatorias completas en los dos puntos siguientes. En primer lugar, al sujeto no se le ocurre combinar los dos vasos entre sí (*E* × *Ind*) —incluso después de haber establecido sus diferencias—, tampoco se le ocurre para las dos probetas; se atiene pues a las 4 combinaciones de base (vaso E × probeta B) + (vaso Ind × probeta B) + (vaso E × probeta Ac) + (vaso Ind × probeta Ac). Por otra parte, incluso cuando descubre la ley (Ind × B = rosa), el sujeto no por ello concluye que el color es el resultado de la combinación: piensa que la base contiene color rosa y el indicador también, y emplea así la noción de lo virtual en el sentido de un "rosado en potencia" y aún no en el sentido de una combinación posible con una resultante distinta de los efectos vinculados con cada uno de los elementos de la combinación.

§ 3. SUBESTADIO II B: OPERACIONES MULTIPLICATIVAS CON COMIENZOS EMPIRICOS DE COMBINACIONES *n* a *n*

Las reacciones del nivel II B son análogas a las anteriores, pero se observa un progreso sensible: el comienzo de las combinaciones *n* a *n*. Sin embargo se trata sólo de simples tanteos empíricos sin que el sujeto descubra aún al sistema:

Kis (9;6) comienza por (3 × g) + (1 × g) + (2 × g) + (4 × g), después mezcla de modo espontáneo los cuatro vasos en uno solo, combinación que tampoco surte efecto. *"Bueno, vamos a volver a empezar"*, esta vez mezcla: en primer lugar 4 × g, luego 1 × g: *"No da nada."* Luego añade 2 × g, mira y por último pone 3 × g. *"Vamos a probar de nuevo* (1 × g, luego 2 × g, luego 3 × g). *¡Ah!* (se volvió amarillo, pero añade 4 × g). *¡Oh! Entonces esto* (4) *es lo que saca el color.* (3) *da el mejor color.* ¿Puedes formar el color con menos botellas? *No.* Inténtalo (se concentra entonces en las combinaciones 2 a 2 de los frascos pero lo hace al azar)."

Alb (10;4) comienza por 1 × 2 × 3 × 4 × g, luego cambia el orden: 3 × 1 × 4 × 2 × g. *"Es diferente, porque la primera vez fui en orden y ahora no.* (Coloca 2 × 4 × 1 × 3 × g) *No da nada* (hace aún algunas permutaciones al azar y luego abandona). ¿Hay que tomarlas todas? *No, se pueden tomar 2 ó 3 si uno quiere* (prueba sin orden sistemático y lo logra por azar). *¡Cambió!"*

Tur (11;6) comienza por 1 × g, etcétera. *"No funciona. Hay que mezclar los cuatro* (lo hace). *No funciona* (cambia el orden varias veces sin éxito

alguno, luego prueba con combinaciones de dos en dos: 1 × 4 × g; 2 × 3 × g; 3 × 4 × g y luego 2 × 1 × g). *¡Me pregunto si no habrá agua en todos!*" Pasa entonces de modo espontáneo a las combinaciones de los frascos de tres en tres (× g), pero sin orden: 3 × 4 × 1 × g; luego 2 × 3 × 4 × g; luego 1 × 4 × 2 × g; luego 3 × 1 × 2 × g: *"Ya está.* ¿Qué hay que hacer para obtener el color? *Poner el 2.* ¿Son necesarios los tres? *Uno por vez* (siempre con g) *no funciona. Con dos me parece que no funciona: falta un líquido.* ¿Estás seguro de que probaste todo con dos? *No, no estoy seguro* (prueba de nuevo 2 × 1 × g, ya hecho, luego 3 × 1 × g). *¡Funciona! ¡Es 1 y 3!* Vas a decirme qué hacen las botellas. *1 es un colorante y 2 impide el color, no, no lo impide puesto que funcionó. 3 quita el efecto de 2 y 4 no hace nada."*

Se ve que, como en el nivel II A, estos sujetos comienzan por multiplicar cada elemento por g o por tomarlos todos a la vez, pero enseguida, y de modo espontáneo, llegan a las combinaciones de 2 en 2 o de 3 en 3 (cada vez × g) y la verdadera novedad de este subestadio reside justamente en esto puesto que, en el nivel II A, siempre se las provocaba. Sin embargo como estas combinaciones no son sistemáticas, el límite superior de este subestadio se mantiene: Tur, el más avanzado entre los casos citados, ni siquiera logra las 6 combinaciones posibles de 2 en 2 (× g).

En cuanto a la causa del color, se la busca aún en los elementos particulares y no en su combinación: Tur sólo localiza el color en 1 y se equivoca acerca de los papeles de 2, 3 y 4. Otros descubren el efecto negativo de 4, pero por medio de una comprobación directa (y fortuita), sin emplear un método específico para la prueba.

Desde el punto de vista de los indicadores (experiencia II), la única novedad sorprendente es la aparición de las combinaciones entre dos vasos (E × Ind), lo que muestra que no sólo hay una tabla multiplicativa de doble entrada, sino también una búsqueda de todas las combinaciones. Pero la explicación sigue siendo la misma:

Mer (9;3) intenta E × B; Ac × Ind; Ind × B; E × Ac: *"Esto* (B) *hace que se vuelva rojo y el vaso de acá* (Ac) *permanece blanco.* Y en los vasos, ¿se encuentra lo mismo? *El agua no es la misma.* ¿Cuál da el color? *En los dos, en el vaso* (Ind) *y allá adentro* (B). ¿(B e Ind), son los mismos? *Sí.* ¿Puedes mostrarlo? (Combina Ind × B = rojo, luego Ind × E = incoloro). *¡Oh! No, no es lo mismo.* ¿Qué cosa? *Esto* (E) *y esto* (Ind) *no son los mismos y esto* (B) *no es lo mismo que esto* (Ac). ¿Los cuatro son diferentes? *Sí.* Dime lo que hay en (B). *Hace que se vuelva rojo.* ¿Y acá (Ac)? *Hace que el agua se ponga blanca.* ¿Y acá (E)? *No hay pastilla* (¡no hay rojo!). ¿Y acá (Ind)? *Hay una."*

Se observa pues la nueva combinación E × Ind, imaginada para ver si B e Ind son semejantes (prueba por otra parte no completa). Pero la explicación sigue siendo la misma que en el nivel II A: el color se halla

virtualmente contenido en B o en Ind considerados aparte, ya sea porque hace "que se vuelva rojo" (poder) ya sea porque hay una "pastilla" escondida (contenido invisible).

§ 4. SUBESTADIO III A: FORMACION DE LAS COMBINACIONES SISTEMATICAS *n* a *n*

Con la aparición del nivel formal las dos novedades son: el método sistemático en el empleo de las combinaciones *n* a *n* y la comprensión del fenómeno de que el color es el resultado de la combinación como tal:

Sar (12;3): "Vuelve a obtener el amarillo. *¿El líquido del vaso amarillo está tomado junto con los otros cuatro?* No te lo digo. (Prueba de entrada con $4 \times 2 \times g$, luego $2 \times g \times 4 \times g$.) *Todavía no* (busca diferenciar el olor de los líquidos, luego intenta $4 \times 1 \times g$). *Todavía no hay amarillo. ¡Qué misterio!* (prueba con los cuatro, luego con cada uno aparte y g, luego pasa de modo espontáneo a formar diversas combinaciones de dos en dos pero siente que se olvida alguna). *Quiero escribir para acordarme: 1×4 ya está; 4×3 ya está y 2×3. Hay varias que todavía no hice* (encuentra las seis, luego añade las gotas y encuentra el amarillo para la combinación $1 \times 3 \times g$). *¡Ah! Se pone amarillo. Hay que poner 1, 3 y las gotas.* ¿Dónde está el amarillo...? ¿Acá adentro (g)? *No, va junto.* ¿Y (2)? *Creo que no hace nada, es agua.* ¿Y (4)? *No hace nada, también es agua. Pero quiero probar de nuevo: nunca se está demasiado seguro* (prueba $2 \times 4 \times g$). *Déme un vaso de agua* (la toma de la canilla y coloca $3 \times 1 \times$ agua $\times g$) es decir la combinación que le dio el color más el agua de la canilla sabiendo que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times g$ no dan nada). *No, no es agua. Quizás es una materia que impide que se forme el color* (coloca $1 \times 3 \times 2 \times g$, luego $1 \times 3 \times 4 \times g$). *¡Ah! ¡Ya está! Este (4) impide el color.* ¿Y esto (2)? *Es agua.*"

Cha (13 años): "*Hay que probar con todas las botellas. Vamos a tomar la de la punta* (de 1 a 4 con g). *No funciona. Tal vez hay que mezclar* (prueba $1 \times 2 \times g$, luego $1 \times 3 \times g$). *Da amarillo: los líquidos 1 y 3 al mezclarse y al agregar g dan el color. Pero ¿hay otras soluciones? Vamos a probar* ($1 \times 4 \times g$; $2 \times 3 \times g$; $2 \times 4 \times g$; $3 \times 4 \times g$; sumadas a las dos combinaciones anteriores, éstas dan las seis combinaciones de dos en dos realizadas de acuerdo con un método). *No funciona. Sólo funciona con* ($1 \times 3 \times g$). *Sí.* ¿Y entonces qué pasa con (2) y (4)? *2 y 4 y g al juntarse no dan el color. Son negativas. Quizá se podría agregar (4) en ($1 \times 3 \times g$) para ver si lo anularía* (prueba). *El líquido 4 anula al conjunto. Hay que ver si 2 tiene la misma influencia* (prueba). *No, por lo tanto 2 y 4 no son semejantes, ya que, sobre 1×3 el 4 actúa y el 2 no actúa.* ¿Qué hay en 2 y en 4? *En 4 seguramente agua. No, lo contrario, en 2 seguro que hay agua ya que no actúa sobre los líquidos, los vuelve más claros.* ¿Y si te dijese que 4 es agua? *Si este líquido 4 es agua, cuando se lo pone con (1×3) no impediría del todo que se formase el amarillo. No es agua; es algo que perjudica.*"

Vemos la total diferencia de actitud entre estos sujetos y los del nivel II B, aunque estos últimos intentan ya algunas combinaciones *n* a *n*. La actitud nueva del nivel III A se plasma a la vez en los métodos combinatorios adoptados y en los mismos razonamientos.

Dos progresos resultan sorprendentes desde el punto de vista del método. En primer lugar la constitución de una combinatoria sistemática *n* a *n*, completa para los números en juego en esta experiencia. Por ejemplo Sar, que tiene miedo de olvidarse algunas asociaciones, compone su lista escrita y Cha construye sin dudar las 6 combinaciones de 2 en 2. Volvemos así a encontrar, pero en una forma tanto más valiosa en la medida en que se presenta de modo más espontáneo, lo que ya hemos comprobado en otra parte cuando estudiamos las operaciones de combinación con consignas que sugieren la operación.[3] El segundo progreso resulta a su vez sorprendente desde el punto de vista de la utilización de estas combinaciones (ya que con toda evidencia las necesidades vinculadas con este empleo, en otros términos, los factores funcionales, determinan la realización acabada de la estructura correspondiente). Encontrada la buena combinación ($1 \times 3 \times g$) que provoca el color, el sujeto no se da por satisfecho sino que intenta ver, como hace Cha, si no hay otras soluciones del problema. Lo que le interesa no es pues el logro por medio de una combinación particular, sino la comprensión del papel que desempeña esta combinación entre el conjunto de las combinaciones posibles.

Ello nos conduce a los progresos del razonamiento. El empleo que los sujetos hacen de las operaciones combinatorias muestra que, para ellos, no se trata de operaciones matemáticas particulares (por otra parte estos sujetos no las estudian aún en la escuela), sino que se trata en efecto de una estructura lógica general, análoga a la de las agrupaciones multiplicativas empleadas en el nivel II A que tienden a completar a partir del nivel II B. Al mismo tiempo que combinan entre sí los factores de la experiencia (los líquidos presentados en los 4 frascos), estos sujetos del estadio III componen sus juicios según una combinatoria semejante: la de las 16 operaciones proposicionales binarias (combinaciones 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 ó 0 de las 4 posibilidades de base $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$. En otros términos, al combinar sus factores experimentales, estos sujetos engendran al mismo tiempo una combinatoria por medio de los enunciados correspondientes a los hechos observados y determinan así los vínculos de conjunción, implicación, exclusión, etcétera, que les sirven para interpretar las combinaciones que establecieron en la experiencia. Esto explica el progreso —correlativo al de las operaciones combinatorias— que se observa en sus razonamientos deductivos y en los enunciados verbales.

Estos razonamientos se refieren en particular a los elementos (2) y (4). Se piensa que el (2) es neutro porque a veces está presente y otras ausente en una combinación coloreada del mismo modo, por otra

[3] *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, cap. VII.

parte, que lo está en una no coloreada. Si p designa la presencia del color y q la del elemento (2), el sujeto comprueba entonces que se puede tener:

$$1)\ (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = (p * q)$$

lo cual excluye toda acción positiva o negativa de (2): "es agua", concluyen Sar y Cha. En cambio, entre el líquido (4) y el color, existe una exclusión recíproca o incompatibilidad como lo afirma claramente Cha:

$$2)\ (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) = (p \veebar q)$$

o

$$3)\ (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = p/q$$

(en donde q designa ahora al líquido 4).

Sin embargo Sar, al comprobar la asociación $\bar{p} \cdot q$ (en las combinaciones 1×4; 3×4, etcétera) supone, en primer lugar, que (4) es tan neutro como (2). Entonces en una combinación $(1 \times 3 \times 2 \times g)$ reemplaza el (2) por el (4) y comprueba que $(1 \times 3 \times 4 \times g)$ se decolora, de donde las asociaciones $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ que caracterizan a la exclusión recíproca.

Por otra parte, este modo de razonamiento formal, es decir, fundado en las combinaciones de los factores y, en consecuencia, en las de los enunciados mismos, conduce de modo natural al sujeto hacia una nueva concepción de la causa del color: esta causa ya no deberá buscarse en un elemento o en otro, sino en la reunión de ellos o, con más precisión, en su combinación misma. Por ejemplo Sar se niega a situar al color en g porque "va junto" (esto es, la causa la constituye el conjunto $1 \times 3 \times g$ como tal); Cha habla de elementos que juntos forman o "no al color"; y otro sujeto, Sie (12;6) declara: "Esto (3) junto con (1) (y con g), da el color: (3) solo no hace nada y (1) solo tampoco." De ahí: si p, q y $r =$ los enunciados de la acción de (1), (3), y (g) y si $x =$ al enunciado del resultado coloreado:

$$4)\ x \supset (p \cdot q \cdot r) \quad \text{y ya no} \quad x \supset r$$

En cuanto a las reacciones de los sujetos de este nivel ante la experiencia II (indicadores) no agregan nada nuevo a las precedentes. Pero lo interesante reside en que el sujeto del nivel III B, incluso después de efectuar únicamente las 4 combinaciones de base que corresponden a una tabla multiplicativa de doble entrada, explica la formación del color por una combinación como tal, según el esquema que se acaba de recordar:

Vir (13;4) asocia Ind × B; E × Ac; Ind × Ac y E × B: "¿Qué piensas? *Simplemente que en dos vasos hay agua química y en los otros dos agua simple... En una columna* (probeta) *se hizo rojo y en la otra no pasó nada.* Entonces, ¿de

dónde viene el color? *No es más que el contacto entre dos aguas... al tocarse una con otra se produce el color.*" Luego pasa a las combinaciones Ind × E e incluso Ac × B, y a las combinaciones de 3 en 3 para estudiar las acciones sucesivas.

Vemos entonces que Vir, aun antes de pasar a las combinaciones que superan su esquema inicial del cuadro de doble entrada, poseía ya una interpretación combinatoria del color.

§ 5. SUBESTADIO III B: EQUILIBRACION DEL SISTEMA

En esta experiencia sólo existe una diferencia de grado entre los niveles III A y III B: en efecto, no es necesario aplicar aquí el método "permaneciendo igual todo lo demás" puesto que los factores ya se presentan en el estado de disociación. Las únicas novedades del subestadio III B residen en que las combinaciones, y sobre todo las pruebas, se presentan de modo más sistemático, es decir, que aparece en este nivel como una meseta de equilibrio en relación con el anterior que constituye una etapa de organización:

Eng (14;6) comienza por 2 × g; 1 × g; 3 × g y 4 × g: "*No, ya no se vuelve amarillo. Entonces, hay que mezclar.*" Pasa a las seis combinaciones de dos en dos y desemboca por último en 1 × 3 × g: "*Esta vez, creo que funciona.* ¿Por qué? *(1) y (3) son agua.* ¿Piensas que es agua? *Sí, no hay diferencia en cuanto al olor. Creo que es agua.* ¿Puedes demostrarlo? (...reemplaza g por agua 1 × 3 × agua). *No, no es agua. Es un producto químico: reacciona con (1) y (3) y entonces el líquido se vuelve amarillo* (pasa a las combinaciones de tres en tres comenzando por reemplazar g por 2 y por 4, o sea 1 × 3 × 2 y 1 × 3 × 4). *No, estos dos productos no son iguales que estas gotas: no pueden producir color con 1 y 3* (entonces prueba 1 × 3 × g × 2). *Con 2 se queda igual. Puedo probar enseguida con 4* (1 × 3 × g × 4). *Se vuelve a poner blanco: 4 es lo contrario de g porque 4 hace que el color se vaya mientras que g hace que venga.* ¿Crees que hay agua en las botellas? *Voy a probar* (reemplaza de modo sistemático 1 y 3 por agua: de donde 1 × g × agua y 3 × g × agua, ya había probado antes con 1 × 3 × agua). *No, quiere decir que 3 no es agua y que 1 no es agua.* (Observa que el vaso 1 × 3 × g × 2 permaneció más claro que 1 × 3 × g.) *Pienso que 2 debe de ser agua. ¿Tal vez 4 también lo sea?* (Vuelve a combinar 1 × 3 × g × 4.) *Entonces no es agua: ya no me acordaba de que se volvía blanco: 4 es un producto que hace que se vuelva al blanco.*"

Vemos que los resultados obtenidos son los mismos que en III A (salvo que el carácter neutro de 2 no se establece aún de modo sistemático en este último nivel). Pero se los descubre por medio de un método más directo porque de entrada se halla organizado en función de la prueba. Este método puede caracterizarse mediante una generalización de la sustitución y la adjunción. Por ejemplo, una vez establecido que el color es

el resultado de $(1 \times 3 \times g)$, el sujeto reemplaza g por (2), luego por (4) para ver si desempeñan un papel equivalente; retoma enseguida $(1 \times 3 \times g)$ y le agrega alternativamente (2) y (4) para determinar lo que producen estas adjunciones. Sin embargo debe comprenderse que ya intervienen tanto la sustitución como la adjunción en la combinatoria del nivel III A: cuando el sujeto construye las combinaciones (1×2), (1×3) y (1×4), la construcción misma de estas asociaciones implica sustituir (3) por (4) y luego por (2); y cuando pasa de las combinaciones de 2 en 2 a las combinaciones de 3 en 3, agrega a una pareja dada (por ejemplo 1×2) los elementos alternativos (3) y (4), o sea $(1 \times 2 \times 3)$ y $(1 \times 2 \times 4)$. Además, como ya vimos, los sujetos del nivel III A se sirven de estas sustituciones y adjunciones para probar ciertos efectos. La única novedad del nivel III B reside pues, en la mayor rapidez con que el sujeto comprende, en el curso mismo de la construcción de las combinaciones, el empleo que puede esperar de estas sustituciones y adjunciones con el fin de determinar los efectos respectivos de los elementos en presencia. Por lo tanto debe buscarse el progreso ante todo en la organización de la prueba y en la unión más estrecha entre los métodos de descubrimiento y los métodos de prueba. En una palabra, la combinatoria se vuelve, desde el comienzo, una deducción probatoria.

En general, la lección de esta experiencia reside pues en la estrecha correlación existente entre la construcción o la estructura de conjunto de las operaciones combinatorias, por una parte, y las de las operaciones formales o interproposicionales, por la otra: al mismo tiempo que el sujeto combina los elementos o factores dados en el contexto experimental, combina los enunciados proposicionales que expresan los resultados de estas combinaciones de hechos y por ello construye el sistema de las operaciones binarias de conjunciones, disyunciones, exclusiones, etcétera. Ahora bien, esta correlación es tanto menos sorprendente en la medida en que se halla en la base de una identidad: el sistema de las operaciones proposicionales es, de hecho, una combinatoria, así como las operaciones de combinaciones que se refieren a los datos experimentales no tienen otro objetivo —en la mente del sujeto— que permitirle establecer estas vinculaciones lógicas. No por ello era menos indispensable verificar esa relación íntima entre las operaciones combinatorias y las operaciones proposicionales por medio del examen de las reacciones del niño y del adolescente ante un dispositivo establecido de tal modo que, de estas operaciones, ni las primeras, ni las segundas, se impusieran mediante una consigna cualquiera, sino que se descubrieran y construyeran del modo más natural y más espontáneo posible.

CAPITULO VIII

LA CONSERVACION DEL MOVIMIENTO SOBRE UN PLANO HORIZONTAL [1]

El primer esquema operatorio de naturaleza formal que fue necesario poner en evidencia debió ser el de las operaciones de combinación, puesto que la estructura reticulada que caracteriza el sistema de las operaciones proposicionales implica una combinatoria. En cambio el segundo esquema operatorio, cuyo estudio emprendemos ahora, se refiere a la estructura de grupo y a la reversibilidad por inversión que la distingue de modo característico. En efecto, tal como insistiremos a continuación de modo más extenso, el sistema de las operaciones formales constituye a la vez un reticulado y un grupo, y une así en un solo haz las transformaciones por reciprocidad e inversión.

Tenemos una bola [2] que corre sobre un plano horizontal propulsada por un dispositivo de resorte: si ningún obstáculo exterior viniese a disminuir su marcha, conservaría un movimiento uniforme y rectilíneo (principio de inercia). De hecho, cierto número de factores impiden en cambio que jamás se produzca un resultado semejante: el roce, que disminuye la velocidad de la bola en función de su peso; la resistencia del aire que la disminuye en función de su volumen; las irregularidades del plano, etcétera. Se plantean pues dos problemas que interesan al pensamiento formal: 1) El problema de lo posible puro o absoluto, es decir, no realizable de hecho: ¿De qué modo logra el sujeto comprender la conservación del movimiento inercial? Desde el punto de vista físico y matemático esta conservación, que constituye una invariante de grupo, ¿acaso también supone desde el punto de vista puramente lógico y cualitativo —punto de vista que corresponderá a nuestros sujetos— una intervención necesaria de la reversibilidad por inversión que caracteriza los grupos de las transformaciones? Intentaremos demostrarlo. 2) El problema de lo posible relativo, esto es, de las posibilidades realizables de hecho: modificación del movimiento por los factores de detención e interferencias entre estos

[1] Con la colaboración de A. M. Weil y de J. Bal.

[2] El material consiste en un conjunto de bolas de diversos pesos y volúmenes.

factores que explican las irregularidades y fluctuaciones de la marcha en el caso de una misma bola.

El interés de los problemas planteados —previsión de los puntos de detención al variar la magnitud y el peso de las bolas y explicación de los movimientos observados— reside entonces en el hecho de que, si las operaciones concretas de seriación y establecimiento de correspondencia permiten establecer un cierto número de relaciones entre las propiedades de las bolas y los puntos de detención, la noción de la conservación del movimiento inercial escapa en cambio por su naturaleza al dominio "concreto", puesto que esta conservación de hecho es irrealizable en las condiciones ordinarias de la experiencia.

§ 1. ESTADIO I: AUSENCIA DE LAS OPERACIONES NECESARIAS PARA UNA LECTURA OBJETIVA DE LA EXPERIENCIA Y EXPLICACIONES CONTRADICTORIAS

Los niños pequeños reaccionan ante esta experiencia como ante la experiencia de la flotación de los cuerpos (cap. II) mediante un conjunto de previsiones y explicaciones precausales que presentan ciertas irregularidades, pero que son contradictorias entre sí: las bolas livianas irán más lejos porque son más fáciles de lanzar y las grandes porque son más fuertes; por otra parte, no existe movimiento sin fuerzas (fuerzas del móvil o fuerzas del motor) y el movimiento se detiene por sí mismo por extinción del impulso, fatiga o tendencia al reposo.

Ra (5;4) intenta prolongar o detener el movimiento de la bola, para ello coloca sus manos paralelas a la bola de tal modo que la encuadren sin tocarla. A veces piensa que las pequeñas irán más lejos, otras veces que las grandes irán más lejos; las primeras porque son livianas, las segundas porque son pesadas; sin embargo cuando una bola pesada no va lejos, es "*porque es demasiado pesada*".

Brei (6;4): "¿Todas irán igualmente lejos? *No, algunas irán más lejos.* ¿Cuáles? *Esta* (pequeña, de madera). ¿Por qué? *Porque es más pequeña.* ¿Hay otras que irán más lejos? *Esta* (también pequeña y de madera), *porque es más pequeña, y ésta* (grande, de metal blando). ¿Por qué ésta? *Porque es más grande, y también ésta* (grande, de aluminio) *porque es grande.*" Se le indica que nos muestre dónde se detienen las cuatro bolas señaladas y responde: "*Allí* (7-8 unidades para la pequeña de madera), *porque es más pequeña. Esta* (grande, de aluminio) *allí* (13-14)." También coloca la pequeña de aluminio a los 13-14 y hace lo mismo con la pequeña de metal blando; sitúa la grande de madera a 5-6 "*porque es más grande y ésta, allá* (grande, de aluminio a 19-20) *porque es grande. Esta acá* (pequeña de madera a 24) *porque es más pequeña*". Vemos pues que piensa que las pequeñas van cerca o lejos (de 1-8 a 24) porque son pequeñas

y las grandes también van cerca o lejos (de 5-6 a 19-20) porque son grandes. Pasamos luego a las explicaciones todas semejantes entre sí y con un cierto agregado de pensamiento finalista: "*No fue muy lejos porque faltaba una bandera.*"

Mey (6;8) la pequeña, de madera "*no irá muy lejos porque es pequeña.* ¿Y ésta (grande, de madera)? *No irá quizá muy lejos porque es grande*". Luego: "*Las dos grandes irán menos lejos porque son grandes... Las tres pequeñas no irán tan lejos como las grandes.*"

Las previsiones dan testimonio así de la ausencia de toda ley, y son contradictorias entre sí. Las explicaciones no desembocan en una coherencia mayor, sino que remiten todo movimiento a una especie de impulso animado.

§ 2. SUBESTADIO II A: INTENTOS DE ELIMINACION DE LAS CONTRADICCIONES Y CORRECCION DESPUES DE EXPERIMENTAR

Si bien no hay aún conservación del movimiento (el movimiento es el resultado de una fuerza, en el sentido aristotélico y la detención es espontánea) y aunque las previsiones se apoyan sobre factores variables (falsos o exactos) se produce a partir de ahora una cierta coherencia entre las relaciones de las afirmaciones y la utilización de los resultados de la experiencia:

Pir (7;6): "*Algunas irán más lejos que otras.* ¿Por qué? *Esta irá más lejos porque es grande y ésta menos lejos porque es pequeña* (se lanza la primera bola). *Fue menos lejos de lo que pensaba.* ¿Por qué? *Porque es pesada.*"

Nic (8 años): "*La grande irá más lejos porque estas pequeñas tienen más peso.*" Y "*ésta irá menos lejos porque es grande, pesada y de hierro.*"

Hal (8;3): "*Las grandes van menos lejos porque las pequeñas son más livianas.*" Cuando una bola se detiene no muy lejos: "*Es porque es más pesada de lo que creía*" y, cuando compara una bola pequeña de metal blando y una grande de aluminio afirma: "*Van hasta el mismo lugar porque tienen el mismo peso.*"

Sin embargo la dificultad propia de la explicación mediante la fuerza, empleada en este nivel, sigue siendo la de conciliar la fuerza del propulsor con la del móvil, según que este último sea pesado o liviano:

Hor (8;6): "*Esta* (grande de aluminio) *irá más lejos porque es más pesada* (fuerza propia vinculada con el peso)." Hace correr la bola de metal blando. "*Va menos lejos porque es pequeña.* ¿Y la otra? *No tiré lo bastante fuerte.*" Luego la grande de madera: "*Irá hasta el fondo porque es liviana.*"

Por lo tanto, las pesadas tienen fuerza pero son más difíciles de arrojar, mientras que las livianas son menos fuertes pero son más fáciles de empujar: de ahí un residuo de contradicciones a pesar del esfuerzo por superarlas.

§ 3. SUBESTADIO II B: COMIENZO DE INVERSION DEL PROBLEMA EN LA DIRECCION DE LAS CAUSAS DE LA DISMINUCION DE VELOCIDAD

Las explicaciones de este nivel no son diferentes de las anteriores, a pesar del esfuerzo creciente pero infructuoso para unificar los factores. Pero el niño cada vez más sensible a la dispersión fortuita de los resultados presenta una tendencia, que por otra parte ni siquiera sospecha, a invertir el problema y a explicar más bien las causas de la disminución de la velocidad que la causa del movimiento. En particular, poco a poco se deja de considerar al peso como causa del movimiento, para transformarlo en causa (indirecta) de la detención. Además, a medida que los sujetos comprenden que la variabilidad de los puntos de detención se explica por la interferencia de los factores de volumen, peso y fuerza de propulsión, tienden cada vez más a pensar que el peso y el volumen son las causas de la disminución de velocidad y cada vez menos a sostener que el poco peso y el tamaño pequeño son causas de la prolongación del movimiento. Las dos clases de afirmaciones parecen equivalentes: a continuación se mostrará que no sucede así:

Jad (10 años) a propósito de una zona de dispersión de cerca de 20 cm afirma de una bola: "*Es demasiado pesada para ir más lejos* (que el punto extremo)", pero al mismo tiempo. "Es *demasiado liviana*" para detenerse en un punto anterior a la zona.

Este tipo de afirmaciones muestra que el sujeto tiende a invertir el problema del movimiento. Pero poco sospecha de ello en la medida en que sus explicaciones siguen siendo las mismas que en el nivel II A y que, en particular, concibe el aire como algo que favorece el movimiento por rebote (ἀντιπερίστασις) y no como un obstáculo.

§ 4. SUBESTADIO III A: INVERSION EXPLICITA DEL PROBLEMA DEL MOVIMIENTO DURANTE LA EXPERIENCIA

La gran diferencia entre este nivel y los precedentes reside en el hecho de que en adelante se invierte el objetivo de la explicación: el problema ya no consiste en comprender por qué avanza la bola, sino

qué cosa se constituye como obstáculo para su movimiento en un momento dado.

Esta inversión se inicia en el subestadio II B, como acabamos de verlo, pero de modo inconsciente. Por el contrario los sujetos del nivel III B al mismo tiempo que piensan, en primer lugar, en los movimientos, en sus previsiones, se ven enseguida conducidos por la experiencia a concentrar su atención en las razones de la disminución de la velocidad o en la detención. Para ellos la detención ya no es un estado positivo: el reposo o la meta del movimiento; se transforma en un estado negativo que hay que explicar mediante la intervención de nuevos factores, que se oponen a ese estado positivo que constituye el movimiento.

Mal (12;3): "¿Para que una bola vaya lejos? *Hay que aflojar* (el resorte). (Experiencia.) Entonces, ¿por qué no fue lejos? *Sí, pero es un terreno malo* (el plano no es bastante liso): *irá menos lejos.*"

Chap (13;3) prevé que las gruesas van más lejos porque son más pesadas. Después de la experiencia invierte la explicación: ¿Por qué las livianas van más lejos? *Depende de si hay viento.* ¿Cómo? *El viento* (o sea, el aire) *les impide continuar su camino. Cuando no hay viento, las livianas van lejos porque no hay nada que las detiene.* ¿Y las pesadas? *No sé.*"

Met (13;3): "*El aire la retiene y va menos lejos.*"

Para la detención se entrevén, a partir de este nivel III A, dos causas de la detención: el roce (terreno) y el aire. Este segundo factor es particularmente significativo, puesto que la "reacción ambiental" del estadio II se abandona para siempre en provecho de la resistencia del aire.

Este progreso constituido por la inversión de la explicación responde sin duda a la necesidad de unificación del pensamiento formal naciente: puesto que ni el peso ni el volumen son causas del movimiento y que por el contrario la bola va lejos en la medida en que es a la vez pequeña y liviana, es porque no hay causa simple para la continuación del movimiento. Ahora bien, es más difícil admitir una multiplicidad de causas para el movimiento, prototipo de fenómeno simple, que para los factores de detención. Sin embargo incluso en este último terreno, el sujeto comienza por buscar la unidad a pesar del espectáculo de la dispersión y fluctuaciones fortuitas, que son una de las razones de la inversión de la cuestión. No triunfa de entrada en esta nueva vía, porque no determina enseguida todos los factores a la vez. Chap descubre así el factor resistencia del aire, pero no piensa en el roce en el caso de las bolas pesadas. Mal, en cambio, hace lo contrario, etcétera.

§ 5. SUBESTADIO III B: CONSERVACION DEL MOVIMIENTO

Por último, el subestadio III B conduce a la explicación fundamental que resulta de la inversión de las posiciones realizada en el nivel III A: la conservación del movimiento inercial. Por otra parte, no sucede con todos los sujetos y por supuesto interviene un aporte difuso del medio social (hubo que esperar a Galileo y Descartes, con la "mutación intelectual" como dice A. Koyré, resultante de sus descubrimientos). Pero la reinvención del principio de inercia se produce de modo bastante espontáneo en algunos sujetos y en otros existe por lo menos una reconstrucción personal de lo aprendido:

Dev (14;6) desde la primera experiencia (bola grande de madera): "*Se detuvo porque hay una resistencia del aire.* ¿Y ésta (pequeña, de madera, previsión)? *Es casi lo mismo, pero la bola es más pequeña: hay menos resistencia del aire e irá más lejos.* ¿Sucede lo mismo para todas las bolas? *No, cuanto más grande es la bola, mayor es la resistencia del aire.* ¿Y para la pequeña y pesada? *Una bola más pesada parte con más dificultad, pero va más lejos porque tiene fuerza en sí misma* (¡peso = fuerza!) (Experiencia.) ¿Y entonces? *Viene de la superficie y del roce. Hay varias resistencias según los cuerpos: la madera es más rugosa, rozará más mientras que las bolas de metal son lisas y rozarán menos.* (Experiencia: pequeña, de aluminio y grande, de madera.) *La resistencia del aire es proporcional al grosor y al peso* (!). ¿Y si comparamos esta grande de aluminio y esta pequeña de metal blando? *¡Ah! No: parten con la misma fuerza. Sólo entran en acción la resistencia del aire y el roce... Esta bola* (metal blando) *es más pesada y tendrá más roce.*" Conclusión: "*Y si no hubiera resistencia del aire, la bola continuaría corriendo.*"

Ras (14;4): "*Teóricamente debería ir hasta el extremo, pero es muy ilógico* (por ilógico entiende que es contrario a los hechos de la experiencia directa)." Al comparar una bola pequeña y una grande aún afirma: "*El roce es más débil sobre la pequeña. La resistencia del aire desempeña también un papel. Teóricamente habría que hacerlas ir en el vacío.*"

Desb (14;9): "*Si se envía con el mismo impulso, esto* (la detención) *depende del peso, del roce, del volumen.*" Enseguida duda de la función del volumen, pero al comparar una pequeña y una grande, afirma: "*La pequeña irá mejor porque tiene menos roce, porque hay menos resistencia del aire.*" "¿Nada más? *Tiene que ser bien horizontal.*" [3]

El razonamiento que conduce a esta conservación del movimiento es muy simple y Dev lo expone en su forma más explícita. La primera etapa consiste en establecer las causas de la disminución de la velocidad

[3] Véanse otros casos de este estadio u otras afirmaciones de los mismos sujetos en § 3 del capítulo XV.

o la detención. Si designamos con p el enunciado de esa disminución de la velocidad o la detención, y con q, r, s, t, etcétera, el roce o la resistencia del aire, las irregularidades de la pista, la falla eventual de su horizontalidad general, etcétera, tenemos entonces:

1) $p \supset (q \vee r \vee s \vee t \vee \ldots)$

Por el contrario la segunda etapa consiste en preguntar cuál sería el resultado de la negación de todos estos factores y esta negación implica entonces la de la disminución de la velocidad, es decir, la afirmación de la continuación del movimiento:

2) $\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \cdot \bar{t} \ldots \supset \bar{p}$

Resulta interesante comparar esta forma de conservación, característica del pensamiento formal, con muchas formas concretas de conservación (conjuntos, longitudes, peso, etcétera; la conservación del volumen y la superficie métrica sólo implican lo formal a causa de las proporciones). En ambos casos, la conservación se adquiere gracias a un juego de operaciones reversibles (por inversión o negación) que en presencia de la modificación resultante de las acciones experimentales permiten corregirla mediante una transformación de sentido inverso que restablece la transformación nula. Pero, en el caso del pensamiento concreto, esta transformación inversa, aunque simplemente pensada, pertenece al mismo orden que la modificación experimental que alteró el sistema y podría ejecutarse en la práctica. Por ejemplo, el estiramiento de un pedazo de pasta para modelar en forma de salchicha puede anularse mediante una disminución de su longitud y aquello que el objeto ganó en longitud lo perdió en espesor; de ahí que puedan obtenerse de nuevo los estadios iniciales mediante acciones que implican las modificaciones inversas. Por el contrario, en el caso de la conservación del movimiento, la reversibilidad operatoria sólo desempeña un papel en el nivel del pensamiento y no corresponde a una transformación que el sujeto pueda realizar en su integridad, incluso en un laboratorio. Si suponemos que se logra (lo cual es imposible) suprimir todas las causas de disminución de la velocidad, debería además disponerse de la infinitud del espacio y del tiempo para obtener una verificación completa del principio de inercia. No obstante el sujeto del nivel III B logra descartar esas causas de detención en su pensamiento, cuando se coloca de entrada en el terreno de lo posible puro o absoluto (irrealizable), por lo tanto, de la implicación puramente hipotético-deductiva.

Una vez realizado esto, basta entonces con efectuar de nuevo una operación reversible (1) y (2) que constituye aquí la contraposición (equivalencia de $p \supset q$ y de $\bar{q} \supset \bar{p}$), pero que se apoya en este caso particular en la doble negación de $(p \vee q \vee r \vee \ldots)$ en $(p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \ldots)$, (por lo tanto de "$p$ o q o r ..." en "ni p ni q ni r ...") y de p en $\bar{p}$.

Esta reversibilidad equivale, si se quiere, al famoso principio *tollitur causa, tollit effectus*; sin embargo, por una parte, había que colocarse desde el punto de vista de lo posible puro para conseguir suprimir las causas de este fenómeno particular y, por la otra, como las causas en juego no son eliminables en la práctica, la operación equivale entonces a la inversión de una implicación en su conversa, pero cambiando de signos, por lo tanto, procediendo con puras implicaciones y ya no con transformaciones realizables en la práctica.

Se ve, pues, a la vez la unidad de las diversas formas de conservación, todas sustentadas en un principio de grupo (cualitativo o lógico antes que métrico) y la diferencia entre las conservaciones obtenidas mediante operaciones concretas de clases y relaciones [4] (o de partes encajadas en un objeto total) y la conservación formal que se apoya únicamente en las operaciones interproposicionales.

[4] En ese caso el aspecto de grupo corresponde a la reversibilidad de la "agrupación", es decir, a las transformaciones no tautológicas (idénticas a las del álgebra de Boole).

CAPITULO IX

LOS VASOS COMUNICANTES [1]

Con la conservación del movimiento, hemos encontrado la forma más simple de los esquemas operatorios que se relacionan con la estructura de grupo, ya que la construcción de esta noción por parte del adolescente se apoya de modo directo en la reversibilidad formal mediante inversión. Con los problemas del equilibrio, del cual encontramos un primer ejemplo en la cuestión de los vasos comunicantes, abordamos una variedad de esquemas más complejos que se apoya sobre la estructura de grupo, ya que en todo equilibrio intervienen a la vez las dos formas posibles de la reversibilidad: la *inversión* que corresponde a las adjunciones o supresiones efectuadas en las partes del sistema que se equilibran entre sí y la *reciprocidad* que corresponde a las simetrías o compensaciones entre estas partes (por lo tanto, a las acciones a la vez equivalentes en sus productos respectivos y orientadas en sentidos contrarios). Ahora bien, las inversiones y reciprocidades forman entre sí un grupo.

Para ilustrar este fenómeno y sobre todo para comprender mejor en qué sentido el esquema operatorio correspondiente a la noción de equilibrio se halla en el centro de los mecanismos del pensamiento formal, recordemos que además de las operaciones en sentido estricto (u "operadores") de la lógica de las proposiciones, tales como la disyunción $(p \vee q)$, la implicación $(p \supset q)$, etcétera, existen transformaciones más generales que modifican entre sí a los operadores. De este modo un operador como $p \vee q$ puede transformarse mediante la inversión o la negación en $\overline{p} \cdot \overline{q}$, mutación que designaremos con N, o sea $N(p \vee q) = \overline{p} \cdot \overline{q}$. También se puede transformar $(p \vee q)$ mediante la reciprocidad R, o sea $R(p \vee q) = \overline{p} \vee \overline{q} = p/q$. Asimismo se puede transformar $(p \vee q)$ mediante la correlatividad C (es decir permutando los $\vee$ y los $\cdot$), o sea $C(p \vee q) = p \cdot q$. Por último se puede convertir el operador $(p \vee q)$ en sí mismo, mediante la transformación idéntica I, o sea $I(p \vee q) = (p \vee q)$. Se comprueba entonces que I, N, R y C constituyen un grupo comunicativo de 4 transformaciones, ya que la correlativa C es la inversa N de la recíproca R, o sea

[1] Con la colaboración de F. Pitsou y de A. M. Weil.

$C = NR$ (y también $C = RN$). Asimismo, se tiene $R = CN$ (o NC) y $N = CR$ (o RC). Por último, se tiene $I = RCN$ (o CRN, etcétera). Ahora bien, el gran interés psicológico de este grupo es que en efecto corresponde a ciertas estructuras fundamentales del pensamiento, en el nivel formal, puesto que la inversión N expresa la negación, la reciprocidad R expresa la simetría (transformaciones equivalentes orientadas en sentidos contrarios) y la correlatividad es la simétrica de la negación. De este modo sólo se comprende realmente la noción de equilibrio, que provoca muy temprano ciertas intuiciones aproximadas (balanza, etcétera), en el nivel formal cuando el sujeto puede a la vez distinguir y coordinar las inversiones (por ejemplo aumentar o disminuir una fuerza en una de las partes del sistema), las reciprocidades (compensar una fuerza por otra equivalente, por lo tanto, asegurar la simetría entre las partes) y las correlatividades (reciprocidad en la negación). Estas transformaciones, relativamente simples en ciertos casos concretos, suponen en efecto un pensamiento y unos enunciados mucho más abstractos en la mayor parte de los problemas de acción y reacción, donde la dificultad consiste en captar que ésta es al mismo tiempo igual a aquélla y orientada en sentido contrario. En estos casos, los instrumentos necesarios para el pensamiento los constituyen no sólo la lógica de las proposiciones, sino además su grupo fundamental I, N, R, C. Trataremos esta cuestión en el capítulo siguiente a propósito del equilibrio entre la presión de un pistón y la resistencia de los líquidos, cuestión que ya percibimos en este capítulo a propósito del problema previo del equilibrio de los vasos comunicantes.

En el caso de los vasos comunicantes, la reciprocidad servirá para expresar las acciones compensatorias entre vasos distintos y las transformaciones por inversión traducirán la elevación y la disminución del nivel del líquido (que obtendremos subiendo y bajando los recipientes y no agregando o sacando agua). En el dispositivo A, el sujeto subirá o bajará a voluntad los vasos con la mano agregando o sacando las piezas sobre las que descansa. En el dispositivo B subirá o bajará los dos vasos mediante palancas, y en el dispositivo C sólo podrá desplazar uno de los dos, permaneciendo el otro inmóvil.

Además, como los recipientes pueden no ser de la misma forma, ni del mismo volumen, es entonces a veces necesario excluir estos dos factores para encontrar la ley, pero la presión del aire equivalente para las dos columnas de líquido puede abstraerse.[2] Con respecto a este último

[2] El líquido que se emplea es agua, sin diferencia de densidad entre los contenidos de los dos recipientes. En los sistemas de vasos comunicantes, las presiones son proporcionales a los pesos de los líquidos (una presión es el cociente de una fuerza por una superficie). El principio fundamental en juego es el siguiente: la diferencia entre las presiones p_1-p_2 ejercidas en dos puntos de un líquido en equilibrio de densidad d es igual al peso zd de un cilindro de líquido que tiene como base la unidad de superficie y como altura la distancia vertical entre los dos puntos: $p_1 - p_2 = zd$ (donde zd representa la fuerza de presión medida en gramos).

punto, pueden intervenir los conocimientos adquiridos, pero queda por saber de qué clase de comprensión y de qué utilización es capaz el adolescente: el problema de las operaciones formales sigue siendo decisivo en este sentido y la influencia de la escuela no impide su análisis.

§ 1. ESTADIO I: INDIFERENCIACION ENTRE LAS ACCIONES DEL SUJETO Y LAS TRANSFORMACIONES DEL OBJETO Y AUSENCIA DE RECIPROCIDAD

El estadio de 4-5 a 7-8 años presenta un gran interés desde el punto de vista del desarrollo de las operaciones: no puede aún efectuarse operación alguna por la falta de disociación entre la acción subjetiva y las transformaciones objetivas y por la de reversibilidad entre las acciones sucesivas. Resulta entonces que el sujeto no logra ni prever, ni comprender la simetría de los efectos objetivos en las relaciones entre los dos recipientes:

Guy (5;6). Dispositivo B: alza alternativamente los dos recipientes y concluye: "*Si tiro acá (I) el agua se va, y luego va allá (II). Si tiro acá (II), el agua va allá (I).*"

Dispositivo A: baja el recipiente de la izquierda y mantiene el de la derecha en posición inclinada: "*Aquí* (derecha) *no hay más agua. Esto es, hay más agua acá* (izquierda): *bajé acá y el agua se fue allá.* ¿Por qué baja? *No sé; porque no quiere volver a subir.*"

Dispositivo C: "*Comprendí: el agua debe ir allá* (cuando alza el recipiente del otro lado)."

Por lo tanto el niño comprende que si tira de un lado, lo que hace subir al recipiente, el agua pasa del otro lado, pero no comprende que se trata de una diferencia de altura. Con el dispositivo A, cuyo fin es hacer más visibles las diferencias de nivel, cree que basta inclinar un recipiente para que el agua se vaya al otro, y cuando se insiste sobre el hecho de que el agua baja, se limita a decir que no quiere volver a subir. Por otra parte, señalemos que esta reacción no es específica ante los vasos comunicantes; durante este mismo estadio el niño no sabe que el agua de los ríos siempre baja.[3] Pero, en este caso particular, esta falla de comprensión se encuentra reforzada por la indisociación entre la acción propia (tirar, inclinar, etcétera) y el proceso objetivo, de tal modo que sólo se comprende la reciprocidad existente entre las acciones de tirar y sus resultados y no entre las bajadas y subidas de los líquidos que tienden a una igualación de los niveles.

[3] Véase Piaget, *La causalité physique chez l'enfant*, págs. 104-114.

§ 2. SUBESTADIO II A: TRADUCCION DE LAS ACCIONES EN OPERACIONES OBJETIVAS Y DESCUBRIMIENTO DE LAS RELACIONES DE ALTURA

Se descubre la función de las alturas: cuanto más alto es un recipiente en relación con el segundo y más sube el agua en este último, más baja en el primero. Esta observación es el resultado de las acciones del sujeto que sube o baja los recipientes por medio de las cadenas o bien de modo directo, pero las acciones se traducen en operaciones que afectan a los resultados obtenidos y los describen en términos de relaciones objetivas disociadas de la actividad propia:

Nel (7;11): *"Siempre sube más en aquél cuando subo éste y cuando lo bajo, baja."*

Tac (8;10). Dispositivo B: Se oculta el recipiente de la derecha y se le pide que haga llegar el agua al tercer nivel. El sujeto lo logra de modo muy cercano y dice: *"Me fijé más o menos acá* (mira la altura obtenida en el otro recipiente)."

Dispositivo A: *"Antes había que tirar; ahora hay que poner las plataformas y entonces los recipientes se alzan"* luego concluye del mismo modo que Nel.

Sin embargo, en lo que se refiere a la explicación, no se trata aún para nada de un equilibrio entre pesos y presiones: simplemente el agua desciende del recipiente más alto para entrar en el más bajo porque está más bajo. En lo que se refiere a la explicación de cómo sube el agua en este último recipiente (puesto que entra por la parte inferior del recipiente), el sujeto de este subestadio recurre entonces al impulso, la velocidad, el aire, etcétera:

Mic (7;10): "¿Comprendiste cómo se mueve el agua? *Hay que bajar* (el recipiente en el que debe subir el agua), *entonces el agua viene... se corrió."*

Tea (8;1): *"El agua pasó por el tubo y se fue al otro."* "¿En qué te fijaste? *Para ver la velocidad. El agua no disminuye tan rápidamente* (en el pequeño) *como en el tubo grueso, porque el tubo es más delgado y tiene menos aire que el grueso. Me asombra que el tubo grueso, que tiene más aire, funcione, y aquél, que tiene menos, también funcione: tal vez sea porque es más largo. Si hay una boca gruesa de aire, el agua andará menos rápidamente."* Por lo tanto, el aire ayuda o detiene según que empuje u ocupe ya el lugar.

El progreso de estas reacciones en relación con las del nivel I resulta muy claro: se descubre la bajada o la subida del agua y ya no sólo la propia acción de tirar de la cadena o desplazar el recipiente. En cambio, resulta difícil captar la diferencia entre estas mismas reacciones y las del subestadio II B si uno no se refiere a las estructuras espaciales a dis-

posición de los sujetos. Como lo mostramos en otra parte,[4] el niño del subestadio II A no puede aún representarse la horizontalidad del nivel del agua en un recipiente inclinado porque no busca el sustento de referencias exteriores a este recipiente y se atiene a las relaciones interiores: sólo cerca de los 9-10 años, con la estructuración de los sistemas de las coordenadas, la horizontalidad y la verticalidad adquieren una significación representativa precisa. Ahora bien, justamente sucede que en las experiencias actuales los sujetos del subestadio II A no señalan aún en absoluto la igualdad de nivel lograda por el agua en los dos recipientes: simplemente descubren que el agua desciende en uno cuando sube en el otro, hasta el momento que se detiene en ambos; saben, además, que el agua desciende del recipiente situado más arriba y que sube en el que se halla más abajo, pero estas relaciones de altura sólo se aplican a los recipientes y no siempre implican la igualdad final de los dos niveles del agua, o sea la horizontalidad de la línea que une estos dos niveles. Por ello, cuando se oculta uno de los recipientes y se le pide al sujeto que obtenga una cierta altura (véase Tac: el tercer nivel del dispositivo B), el sujeto sólo lo logra de modo aproximado y mira la altura a la que llega el otro recipiente y no el nivel del agua.

En suma, la noción de equilibrio del sistema comienza pues apenas a entreverse y se reduce esencialmente a las operaciones de elevar y bajar los recipientes con el fin de hacer descender o subir al agua. Sin duda tenemos ya aquí un comienzo de inversión (subir y bajar los recipientes) y de reciprocidad (el agua desciende en uno cuando sube en el otro), pero falta la condición de equivalencia, la única que permitiría coordinar estas transformaciones: la igualdad final de los dos niveles del agua.

§ 3. SUBESTADIO II B: IGUALDAD FINAL DE LOS NIVELES DEL LIQUIDO PERO AUSENCIA DE EXPLICACION

El subestadio II B, el que corresponde a la realización acabada de las operaciones concretas, marca también una especie de nivel *maximum* en la estructuración del esquema del equilibrio por más que el sujeto no recurra aún a las operaciones formales: gracias a la construcción de los sistemas de referencia espaciales (ejes de coordenadas naturales), el niño descubre la igualdad de los niveles del agua en los dos recipientes (horizontalidad), como una condición para el equilibrio del sistema, pero así sólo llega a formular la ley sin descubrir sus causas, porque la ley se halla toda contenida en las operaciones de clases y relaciones que bastan para determinar las correspondencias que se presentan, mientras que la explicación requiere la intervención del grupo de las 4 transformaciones interproposicionales señaladas en el comienzo de este capítulo.

[4] Piaget e Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, cap. XIII.

Xi (8;9): "*Cuando tiro acá, el otro* (recipiente) *se llena; cuando tiro allá, el otro también se llena.* El agua está en el número 2, colócala en el número 3 (lo logra). ¿Cómo lo hiciste? *Vi que cuando el agua sube acá baja allá; entonces hice la inversa...*, etcétera." En un momento dado se equivoca (se oculta siempre el lugar que debe alcanzarse). Toma entonces la regla y mide desde la mesa al número indicado, luego transporta la misma altura sobre el recipiente visible, del otro lado, para determinar el nivel del agua. Otra vez coloca su regla en posición horizontal para asegurar la igualdad de los niveles.

Mic (9;11) logra la prueba del nivel oculto: "¿Cómo supiste? *Porque calculé el piso acá y miré allá del mismo modo.*"

Soc (10;9): "*El agua está en el mismo nivel. Cuando subo acá, el agua sube allá, pero siempre está el mismo contenido, incluso cuando sube.* ¿Qué entiendes por contenido? *Siempre hay la misma cantidad de agua* (ve claramente que los volúmenes son diferentes): *el agua permanece a la misma altura de los dos lados.*"

Dom (11;4): "*El nivel es exactamente el mismo.*" "*El agua sube rápido en este tubo y desciende menos rápido en la botella: se debe al volumen de los recipientes, pero en cambio el agua siempre estará al mismo nivel.*" Dispositivo A: "¿Y el nivel? *Cambiará. No, más bien siempre será el mismo* (de los dos lados), *pero cambiará de altura* (absoluta)."

Gas (10;6) mide las alturas y verifica la horizontalidad. Se le presenta un tubo largo que se comunica con un crisol muy ancho: prevé que de todos modos los niveles serán idénticos.

De este modo vemos que, en correlación con la constitución de los sistemas de referencia fundados sobre las coordenadas del espacio físico inmediato (verticales y horizontales), estos sujetos descubren a la vez la igualdad de nivel de los líquidos y los medios para verificarla, ya sea controlando la horizontalidad de la línea que une las superficies (Xi y Gas), o bien midiendo las alturas respectivas (Xi, Mic y Gas). Este pasaje de lo cualitativo a lo métrico muestra bastante la preocupación del sujeto ante los ejes de coordenadas, y la sustitución de la noción de equilibrio del subestadio II A fundado sobre las subidas y bajadas por la del equilibrio fundado sobre la igualdad de los niveles. Las transformaciones por inversión se reducen entonces a la elevación o a la disminución del nivel en uno de los recipientes, mientras que la reciprocidad implica a partir de entonces al conjunto de las transformaciones que relacionan el nivel del líquido de uno de los recipientes con el nivel del otro.

¿En qué consiste entonces el mecanismo de estas transformaciones? Las únicas operaciones concretas que tiene a su disposición el sujeto de este estadio no le permiten establecerlo: simplemente lo conducen, por sus seriaciones y correspondencias espaciales y temporales, a determinar las condiciones del equilibrio pero aún no logra establecer en absoluto el juego

de las fuerzas en presencia. Cuando se pasa de la ley a la explicación, algunos sujetos, como Soc, invocan una igualdad de los "contenidos" o "cantidades", pero como resulta evidente que los volúmenes son diferentes, esta cantidad se reduce al fin de cuentas a la igualdad de las alturas, es decir, de los niveles. Los otros insisten sobre las diferencias de volumen (Dom y Gas) para explicar las distintas velocidades de escurrimiento y, por último, también para señalar la igualdad de los niveles. Un sujeto de 10 años nos precisó que el agua siempre va "lo más bajo posible", lo que muestra —como lo sabíamos— que a partir de entonces se atribuye al peso del agua su tendencia a descender. Sin embargo, ya no se invoca el peso como una explicación del equilibrio, puesto que los volúmenes en juego son claramente distintos. En resumen, a partir de entonces se describe correctamente al equilibrio gracias a las operaciones concretas que permiten establecer las inversiones y reciprocidades espaciales y temporales, pero no se lo explica en absoluto porque se carece de las inversiones y reciprocidades que se refieren a las acciones y reacciones.

§ 4. SUBESTADIO III A: COMIENZOS DE EXPLICACION Y ESTRUCTURACION FORMAL

Se asiste en cambio en este primer nivel formal a un reordenamiento importante de las operaciones y la explicación. Por fin se ha adquirido la conservación del volumen y por fin se lo diferencia de la cantidad de materia y del peso.[5] Resulta entonces el siguiente fenómeno paradójico: la situación ante la cual los sujetos del subestadio II B no se sentían para nada molestos, es decir, la igualdad de los niveles cuando los volúmenes son diferentes (y también lo son las formas de los recipientes) parece imposible de ser aceptada por los sujetos del subestadio III A. Lejos de generalizar la ley para todos los casos, como sucede en el subestadio II B (mediante una generalización por otra parte limitada, puesto que sólo se refiere a los niveles), los sujetos del subestadio III A comienzan por restringir el alcance de la ley a los casos en que las formas y los volúmenes son iguales. Ante formas y volúmenes desiguales, piensan que la igualdad de los niveles desaparece y cuando la experiencia les muestra que no sucede así, limitan sus conclusiones a los casos efectivamente observados y se niegan a formular cualquier generalización que supere los casos que les parecen excepcionales. Tenemos pues aquí un buen ejemplo de interferencia entre las operaciones constitutivas de la ley y las operaciones explicativas o causales. Con mayor precisión, las operaciones del estadio III, al convertirse en explicativas, conducen al sujeto a limitar la generalización que es el resultado de las operaciones concretas o legales (legales porque

[5] Véase Piaget e Inhelder, *Le développement des quantités chez l'enfant*, caps. III y VIII-IX.

aquí sólo se refieren a los niveles y no aún al equilibrio de las acciones y reacciones).

¿En qué consisten pues estas nuevas operaciones? En concebir el equilibrio de los vasos comunicantes, no ya sólo como un flujo desde arriba hacia abajo hasta obtener la igualdad de los niveles, sino como un sistema de acciones y reacciones, cuyas inversiones y reciprocidades deben enunciarse por medio de un lenguaje mecánico y ya no espacial y temporal. Por ello, los sujetos de este subestadio exigen, para que haya igualdad de nivel, una igualdad de peso fundada sobre la de los volúmenes y niegan, ya que no comprenden la compensación como resultado de la relación del peso de la columna vertical de agua con la superficie de base de esta columna, que dos vasos que no tengan el mismo contenido, puedan verificar la ley.

And (12;9) establece la igualdad de los niveles en todas las posiciones. "¿Y si en el lugar de ésta se pusiera una botella de forma cónica? *Con la forma cónica no se puede obtener el resultado.* Sin embargo, me dijiste que se trataba siempre de los mismos niveles. *Es el mismo con la condición de que el diámetro sea el mismo en todas las alturas del recipiente. Aquí* (formas cónica y cilíndrica) *las alturas... No se llegarían a compensar* (el uno por el otro): *La forma del recipiente desempeña una función.*" Hace la experiencia y se asombra cuando obtiene el mismo nivel: "¿Cómo lo explicas? *Probablemente la forma del recipiente no desempeña una función.* ¿Por qué 'probablemente'? *¡Porque los hechos están a la vista!* (Véase esta oposición entre los hechos y la teoría, tan característica del pensamiento formal.) ¿Por qué se tiene el mismo nivel? *Porque* (el recipiente cónico) *se ensancha hacia arriba* (la apertura se encuentra abajo). ¿Y si estuviera al revés? *No se tendría el mismo nivel* (!). ¿Qué sucede cuando el agua está en el tubo? *No se tiene el mismo nivel porque el tubo es más delgado que el recipiente.*"

Boh (12;8) afirma que los niveles son los mismos. En el caso del dispositivo B, cuando se oculta uno de los recipientes, toma medidas verticales precisas: "*Siempre que se alza un recipiente, en el otro se alza el agua: entonces el agua debe subir o bajar en los dos.*" "¿Sucede siempre así? *Sí, siempre... No, no en todos los casos: no cuando los recipientes no tengan el mismo grosor.* Pero en este dispositivo (C) ¿los recipientes son del mismo grosor? *No, pero la longitud del tubo y el grosor del recipiente pueden contener la misma cantidad de agua.* ¿Y acá (recipiente largo y tubular a la izquierda y amplio crisol a la derecha —véase el caso de Gas en el estadio II A—)? *Acá* (en el crisol) *el agua sólo llegará hasta aquí* (mucho más abajo que el otro). ¿Por qué? *Porque el recipiente es más ancho.*"

Ean (13 años). Dispositivo A: alza los dos recipientes a la vez: "*para ver si cuando los alzo juntos obtengo el mismo nivel para los dos como cuando estaban abajo.*" Luego: "*Para agregar una parte de agua en uno hay que quitar la misma cantidad en el otro. Cuando coloco los recipientes en diferentes posiciones* (uno en relación con el otro) *siempre se obtiene el mismo nivel en los dos.* ¿Y si se pusiera una botella delgada en el lugar de ésta? *Si tengo una gruesa y una pe-*

queña no sucede así porque el volumen es más grueso... el nivel es siempre más alto."

Pie (14;3) recipientes iguales: "*Si una botella está* (colocada) *más arriba que la otra, el agua va a la otra*" porque "*en la cantidad, es lo mismo*". Pero con recipientes desiguales "*cuando tengamos la misma cantidad en los dos vasos el nivel del tubo será más alto porque es más delgado*". Cuando se oculta uno de los recipientes, responde: "*No puedo calcular, porque el diámetro de los dos vasos no es el mismo.*"

Resulta clara la diferencia existente entre estos sujetos y los del subestadio II B, por más que a veces empleen las mismas palabras: la "compensación" (And) es a partir de entonces una cuestión de "cantidades" entendidas como fuentes de fuerzas iguales (por la igualdad de sus pesos y sus volúmenes), como sucede en el caso de una balanza. A cantidades desiguales deberían, pues, corresponder niveles desiguales. Cuando los sujetos comprueban que los hechos se oponen a esta idea se resignan, como lo hace And ("porque los hechos están a la vista"), pero se niegan a generalizar para otros casos. En resumen, ignoran el detalle de la explicación, pero como sólo se atienen a lo que conocen, razonan de modo coherente y proporcionan un ejemplo muy revelador de la subordinación lógica de la ley a la causa y de la asimilación de la causa con las transformaciones formales de inversión y reciprocidad proyectadas en lo real. Puede, en efecto, sostenerse que estos sujetos son interesantes en razón misma de la ignorancia de la explicación exacta: a pesar de no haber aún recibido enseñanza escolar en lo que se refiere al fenómeno de los vasos comunicantes, no por ello dejan de esbozar una interpretación fundada en la compensación (como dice And), es decir, en el hecho de que cada una de las dos cantidades de líquido ejerce una presión sobre el otro, y por ello mismo las dos presiones se hallan orientadas en sentidos contrarios. Existe pues en efecto una diferenciación y coordinación de las transformaciones de inversión (subir o bajar los niveles) y reciprocidad (acciones y reacciones de una de las cantidades de agua sobre la otra). La única limitación de esa explicación reside en que el sujeto no sabe aún cómo generalizarla en el caso de las cantidades desiguales, pero no por ello el principio es menos exacto. Antes de intentar formular estos razonamientos, examinemos aún las reacciones del subestadio III B influidas en cambio, por los conocimientos escolares (conocimientos que sólo se asimilan en la medida en que corresponden al esquema cuya construcción acabamos de percibir).

§ 5. SUBESTADIO III B: GENERALIZACION FORMAL DE LOS CONOCIMIENTOS ADQUIRIDOS

Por fin, en el subestadio III B el esquema espontáneo de explicación esbozado durante el subestadio III A se enriquece con ciertos conocimientos proporcionados por la enseñanza, y se supera así la contradicción entre la igualdad de nivel y las desigualdades eventuales de cantidades de líquido. Sin embargo, como resulta fácil percibirlo, este aporte exterior no modifica la estructura del razonamiento:

Pic (13;6): *"Estos niveles siempre son iguales entre sí porque las fuerzas se compensan"*; estas fuerzas son, según Pic, la presión del aire y el peso del agua.

Min (14 años): *"Si se tienen dos recipientes de igual grosor o de grosores diferentes, en ambos el agua se encontrará en el mismo nivel porque cuanto más grande es el recipiente mayor es la presión del aire sobre una superficie grande y, recíprocamente, cuanto más pequeño sea el recipiente, más actuará el agua sobre una superficie pequeña, y por lo tanto se equilibran.* ¿Sucede siempre así? *No. Pensemos en dos habitaciones: si hay más presión* (de aire) *en la habitación en la que se coloca la botella de la izquierda y menos presión en la pieza en la que se coloca la botella de la derecha, entonces el nivel de la izquierda será más bajo."*

En otras palabras, una vez que el sujeto comprendió más o menos bien que la presión del líquido es relativa a la superficie de base de la columna vertical, explica el fenómeno de los vasos comunicantes de modo análogo a como lo pensaba en el nivel III A, pero con generalización a los casos de cantidades desiguales. Lo esencial de la explicación radica entonces, incluso en el caso de volúmenes desiguales, en la compensación de las presiones en función de la altura de las columnas "por lo tanto se equilibran", como afirma Min cuando se refiere esta vez a recipientes que tienen contenidos diferentes.

§ 6. LA NOCION DE EQUILIBRIO Y EL GRUPO DE LAS 4 TRANSFORMACIONES INTERPROPOSICIONALES *INRC*

Resulta interesante, para comprender mejor la naturaleza de la estructuración formal que conduce a la formación del esquema operatorio del equilibrio, comparar entre sí lo que puede llamarse las reciprocidades concretas del estadio II y las reciprocidades formales del estadio III.

La primera forma de reciprocidad aparece a partir del nivel II A con el siguiente descubrimiento (inaccesible en el nivel I): cuanto más alto es uno de los recipientes (I) en relación con el otro (II) más sube el

agua en el segundo recipiente. El establecimiento de estas relaciones supone las siguientes operaciones:

1) Una seriación de las alturas: $A_1 < B_1 < C_1 < \ldots$, tomándose como referencia al otro recipiente;

2) Una seriación de los niveles de las alturas crecientes en el recipiente inferior (con referencias interiores a este recipiente).

$A_2 < B_2 < C_2 < \ldots$;

3) Una correspondencia (ordenada) entre las dos seriaciones:

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & < & B_1 & < & C_1 < \ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ A_2 & < & B_2 & < & C_2 < \ldots \end{array}$$

4) En caso de inversión de la situación, se establece entonces una seriación de las alturas ocupadas por el recipiente I en orden descendente: $\ldots C_1 > B_1 > A_1 \ldots$, y también de los niveles en II $C_2 > B_2 > A_2$. Se establece entonces la correspondencia en orden inverso;

5) La reciprocidad concreta consiste así en una simetría de las correspondencias: $(A_1 \leftrightarrow A_2) \rightleftarrows (A_2 \leftrightarrow A_1)$.

En el nivel II B se añade a todo esto un sistema de referencia exterior a los recipientes, que permite la introducción de las nociones de horizontalidad e igualdad de los niveles una vez terminado el trasvase del agua. Hemos tratado en otra parte las operaciones necesarias para la construcción de este sistema espacial.[6] Limitémonos a señalar que se reemplazan las seriaciones y correspondencias (1-3) por una correspondencia entre los niveles del agua en los dos recipientes. Si llamamos $+A$; $+B$; $+C$, etcétera, a las alturas crecientes comprendidas entre la horizontal (la línea de igualdad final) y los niveles del recipiente superior, y $-A$; $-B$; $-C$, a las alturas crecientes correspondientes comprendidas entre la línea de igualdad y los niveles del recipiente inferior, el niño del nivel II B establece la correspondencia:

$$\begin{array}{ccccccc} 6) \ldots (+C) & > & (+B) & > & (+A) & > & 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \ldots (-C) & > & (-B) & > & (-A) & > & 0 \end{array}$$

La reciprocidad es así el resultado de la igualdad de las diferencias $+X$ y $-X$ y su compensación continua hasta obtener las diferencias nulas (horizontalidad de la línea que por último reúne los dos niveles); se

[6] Piaget e Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, cap. XIII.

reduce pues a una simetría espacial (pero sin explicación causal adecuada). En cuanto a las operaciones de inversión consisten en aumentar o disminuir las diferencias $\pm A$; $\pm B$; $\pm C$, etcétera, lo que podría obtenerse mediante una adjunción o supresión de cantidades de líquido en uno de los dos vasos, pero que se obtiene de modo más simple por medio de una elevación o de un descenso de este recipiente. Se tiene entonces (si A' es la diferencia entre las alturas crecientes A y B):

7) $A + A' = B$; etcétera y $B - A' = A$

Pero ningún sistema operatorio de conjunto permite todavía al sujeto fusionar en un único todo las reciprocidades por correspondencia (6) y los aumentos o disminuciones de diferencias (7). Se encuentra por ello limitado a describir el equilibrio sin lograr comprenderlo como un sistema causal único.

Con la noción de las acciones y reacciones que se compensan, características del estadio III, intervienen entonces dos novedades: la reciprocidad espacial de los niveles se convierte en una reciprocidad de las presiones y constituye un sistema operatorio único con las operaciones de inversión.

Se puede formular esta coordinación de las inversiones y reciprocidades del siguiente modo. Llamemos p y q a los enunciados de los efectos de dos presiones cualesquiera pero distintas ejercidas por el agua contenida en el recipiente A (presiones que se obtienen por medio de una elevación del recipiente A y que se ejercen sobre el líquido contenido en el recipiente B). Llamemos $\bar{p}$ y $\bar{q}$ a los enunciados de la anulación de estos efectos, ya sea una inversión de sus causas (por lo tanto, bajar el recipiente A hasta la supresión de las elevaciones iniciales) o bien una compensación bajo la influencia de presiones que se ejercen en sentidos contrarios.

Se tienen entonces las 4 siguientes posibilidades:

8) I $(p \vee q)$: transformación directa o efectos de las presiones ejercidas por el líquido A sobre el líquido B;

N $(p \vee q) = \overline{p \vee q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$: transformación inversa o supresión de los efectos p y q;

R $(p \vee q) = \bar{p} \vee \bar{q}$: transformación recíproca o efectos de las presiones ejercidas por el líquido B sobre el líquido A;

C $(p \vee q) = \overline{\bar{p} \vee \bar{q}} = p \cdot q$: transformación correlativa, esto es, inversión (= negación) de la recíproca, por lo tanto anulación de los efectos contrarios $\bar{p} \vee \bar{q}$, lo que equivale a la afirmación simultánea de p y de q, o sea $p \cdot q$.

Este es el esquema de los razonamientos que produce el sujeto del nivel III. Además, comprende que el punto de equilibrio se logra cuando los valores x y y, que corresponden respectivamente a las presiones enun-

ciadas por $p \vee q$ y por $\bar{p} \vee \bar{q}$ son iguales. En efecto en tanto se tenga $x > y$ o $x < y$ los líquidos se hallan todavía en movimiento en los tubos A y B. En cambio todo movimiento termina cuando los líquidos se encuentran en el mismo nivel (enunciado por r), porque:

9) $r \circ [x(p \vee q) = y(\bar{p} \vee \bar{q})]$

Los sujetos del subestadio II B ya comprobaban este nivel horizontal común a los tubos A y B pero no podían explicarlo, y los sujetos del estadio III lo interpretan como el resultado de una igualdad de las presiones, enunciada por la doble reversibilidad de las transformaciones *INRC*.

CAPITULO X

EL EQUILIBRIO DE LA PRENSA HIDRAULICA [1]

La explicación progresiva que los sujetos proporcionan acerca del fenómeno de los vasos comunicantes acaba de mostrarnos la importancia, para la constitución del esquema operatorio del equilibrio, de las transformaciones formales de inversión y reciprocidad y del grupo *INRC* que forman entre sí según sus posibles combinaciones. El inconveniente de la experiencia de los vasos comunicantes reside en que la presión inherente a los líquidos escapa a toda posibilidad de ser medida por parte de los sujetos: el detalle de la explicación no interviene entonces más que en función de los conocimientos adquiridos. En el dispositivo que trataremos aquí se encuentran dos vasos comunicantes; uno de ellos se halla provisto de un pistón que puede cargarse con diferentes pesos: la presión ejercida sobre el líquido será, pues, directamente proporcional a los pesos (debe señalarse en efecto que el pistón no entra en acción mediante una fuerza exterior, sino que lo hace por su propio peso). Por otra parte, a esta acción del peso le corresponderá una reacción del líquido (el desplazamiento del líquido que sufre la presión será inversamente proporcional a la resistencia del líquido): ahora bien, también aquí, puede volverse tangible esta reacción de la resistencia si se cambia la densidad del líquido, es decir, si se emplean alternativamente agua, alcohol y glicerina. Se añadirá a este problema del equilibrio el de la transmisión misma de las fuerzas: se tratará de comprender que la fuerza ejercida por el pistón se transmite de modo uniforme en el interior de todo el líquido, y que el equilibrio entre la acción y la reacción no sólo afecta la superficie del primero (o el punto más bajo del dispositivo), sino al conjunto del sistema.

El problema de las relaciones entre el pensamiento concreto y el pensamiento formal en este caso particular es el siguiente: comprender cómo pasa el sujeto de las simples correspondencias observadas entre los pesos y los desplazamientos del líquido a una explicación que exprese la transmisión completa de la fuerza en función del peso y en razón inversa de la densidad: por lo tanto, no sólo volvemos a encontrarnos aquí con el

[1] Con la colaboración de A. M. Weil, A. Tissot y M. Wikström.

esquema operatorio general del equilibrio sino, en particular, con la igualdad de la acción y la reacción, especialmente propicia para el estudio del papel que desempeña en el pensamiento el grupo *INRC*.

§ 1. ESTADIO I: INCOMPRENSION DEL PAPEL DEL PESO (SUBESTADIO I A), LUEGO COMPRENSION GLOBAL SIN SERIACIONES NI CORRESPONDENCIAS OPERATORIAS

En el nivel I A el sujeto ni siquiera logra prever de modo unívoco que el agua sube en el tubo delgado (*B*) por causa del peso del pistón, porque si lo "pesado" tiene fuerza ("apoyar" o "empujar", por asimilación con la propia acción), lo "liviano" es, por su parte, apto para "levantar" (por asimilación con "levantarse"). Además, en este nivel no hay conservación de las cantidades: no necesariamente se conserva el agua de los tubos y éstos pueden llenarse o vaciarse sin razón suficiente.

Kot (5;6): "*Va a subir el agua* (muestra el tubo B); *debe llenarse para subir.* ¿Y si coloco este pistón? *Se va a llenar.* ¿Y si coloco esta caja (500 g)? *Podría llenarse más* (se prueba). *Porque apoya.* ¿Si quito esta caja? *Va a descender.* ¿Adónde? *Como antes* (coloca la caja de 2 kg). *Un poco más arriba* (reemplaza la caja por la de 1500 g). *Un poco más abajo. Las pesadas van más abajo* (¡en B!). *Las pequeñas no pueden alzar algo muy arriba.*[2] *Las grandes y las gruesas pueden ir muy cerca* (un pequeño desplazamiento). *Las pesadas no pueden, pero las pequeñas van muy arriba* (contradicción). Toma las pequeñas. (Las sopesa.) *Esta debe de ser la más pequeña* (¡1500 g: la coloca!). *¡Sin embargo con todo se fue un poco arriba! Creo que la más liviana es ésta* (500 g) *y creo que ésta es la más pesada* (2 kg: estos dos extremos se evalúan acertadamente, pero el resto de la seriación es falso: 1000 > 1500 g, etcétera). *¡Oh! Esta* (2 kg) *es la más pequeña* (las coloca todas una por una). *Esta es la que va más abajo* (500 g). ¿Por qué? *Es la más gruesa* (coloca 2 kg). *¡Ah! Pero es la que sube más arriba; se ve que es la más pequeña.* ¿Por qué la más pequeña? *Es la más liviana y también la más pequeña.* ¿Es la más liviana? *Lo siento cuando la levanto* (las levanta una por una sin compararlas de a dos). *Sí.* ¿Por qué con ésta sube más el agua? *Porque apoya, hace subir al agua.* ¿Y si colocas una pequeña? *Hace subir al agua muy arriba.* ¿Y una liviana? *Es como los peces que están en el agua: pueden levantarse* (coloca 1500 g y 1500 g juntos). *Sube alto.* ¿Por qué? *Porque ésta* (muestra una de las dos cajas de 1500), no era pesada (!)."

Jog (6 años): "*¡El agua volvió a subir!* ¿Por qué? *Porque pusimos el tubo* (pistón) *encima, hizo subir de nuevo el agua.* Y si colocamos esta caja encima, ¿cambiará? *Subirá más* (muestra demasiado abajo). (Se hace la experiencia y se muestra el lugar previsto.) ¿Por qué no allí? *Era demasiado pesado* (por lo tanto, se

[2] Debe señalarse que todas las cajas (de 500 g a 2000 g) tienen el mismo volumen.

considera aquí al peso como causa de la subida). ¿Y luego? (Coloca 1500 g y 1000 g y comprueba que la primera hace subir más que la otra.) ¿Por qué? *Porque es menos pesada que la amarilla* (lo cual es falso; ¡además resulta que ahora la liviana hace subir más alto!)."

Valía la pena citar estos casos para mostrar de qué estado de incoherencia parten los razonamientos que terminarán por lograr el nivel de la lógica formal. En primer lugar se comprueba que estos sujetos no logran seriar con corrección los pesos, ni admitir la igualdad de tamaño de las cajas que los contienen (sin embargo todas son exactamente iguales). Por otra parte, y en conexión con esta situación preoperatoria, lo pesado puede a veces hacer subir más el agua y a veces menos, y lo liviano puede, también alternativamente, dejar de presionar sobre el agua o, por el contrario, elevarla. Sucede incluso que dos pesos superpuestos hacen subir bastante alto el agua porque se piensa que uno de los dos (con error en la comparación) es más liviano que el otro: la no aditividad se añade así a las contradicciones precedentes. En resumen, no podría todavía constituirse una ley, ya que se carece de toda coherencia operatoria.

En el nivel I B el niño comprende en términos generales que cuanto más pesado es el peso más sube el agua en el tubo B, pero sin establecer seriación, correspondencia *ni* previsión exactas, porque las operaciones no se hallan acabadamente realizadas:

Jac (6 años), después de algunas pruebas, prevé que la caja de 1500 g producirá el mismo resultado que la de 2 kg *"porque es igualmente pesada"*. El agua sube *menos* alto. Entonces vuelve a tomarse la caja de 2 kg: prevé una vez más que el nivel será el mismo *"porque son la misma cosa"*. El agua sube más arriba. "¿Por qué? *Porque es más pesada.* Y ésta (500 g) ¿adónde irá? *No sé.* ¿Al mismo lugar? *No, porque es menos pesada.* Y ésta (1500 g) ¿puedes adivinar adónde hará ir al agua? *No* (sin embargo, pesa). ¿Por qué sube aquí (B) el agua? *Porque hay algo que toca el agua, el tubo* (pistón) *empuja encima. Apoya más o menos y siempre la hace subir.*"

Mon (6 años): *"Porque hay más peso y la hace ir más arriba. El pistón hunde más* (en A) *y hay más agua allí* (en B)."

Del (7 años) da las mismas explicaciones pero busca además reconocer los pesos por sus grosores. Ahora bien, la caja de 500 g le parece más gruesa que la de 1500 g; de ahí que incurra en contradicciones: lo "pesado" acompaña a lo "grueso", lo "pesado" hace subir más al agua pero lo "menos grueso" también.

Existe pues un progreso en relación con el nivel I A en el sentido de que el peso se convierte por lo general en la causa del ascenso del agua. Pero, como los pesos están mal seriados y las igualaciones mal establecidas, subsiste una cierta zona de indeterminación que a menudo provoca previsiones inexactas.

§ 2. SUBESTADIO II A: SERIACION EXACTA DE LOS PESOS Y CORRESPONDENCIA CORRECTA CON LOS NIVELES

Desde el comienzo de las operaciones concretas, hay establecimiento de correspondencia entre los pesos y los niveles: los pesos son o iguales a, o distintos de 500 g; su seriación ya no constituye una dificultad (lo que no sucedería antes de la aparición del nivel II B si las diferencias fuesen menos sensibles). Pero el progreso alcanzado se detiene en este punto. En lo que concierne sobre todo a la densidad del líquido, el niño piensa, hasta los 9 años como promedio, que cuanto más pesado es el líquido más alto subirá ¡porque su peso se agrega al del pistón que hace subir el agua! En este primer nivel operatorio no hay entonces noción alguna de la resistencia del líquido, es decir, de una reacción orientada en sentido contrario en relación con la acción de presión, por lo tanto no hay reciprocidad alguna en el dominio de las fuerzas:

Sol (7;11): "*Si el pistón se hunde más, el agua sube más.*" La caja de 2 kg hará subir el agua más que la de 1500 g "*porque está cargada.* ¿De qué depende? *Del peso que está adentro.* ¿Si es más pesada? *Sube más arriba.* ¿Y si es más liviana? *Más abajo*". "*Si se tuviera un peso muy grande, se iría* (gesto), *saltaría hacia afuera.*"

Cor (7;11) presenta las mismas reacciones ante el agua, después se coloca alcohol: "¿Por qué ahora esta caja va más abajo? *Porque la caja se volvió más liviana.* ¿Por qué? *No es el mismo líquido.* ¿Y entonces qué sucede? *Esto* (el líquido) tal vez *sube más arriba: porque el líquido es más pesado, hay más peso.* Este (el alcohol), ¿es más pesado? *Sí, es más pesado* (puesto que) *sube más arriba: hace peso y entonces hace subir.*"

Pal (8 años). (Experiencia con la glicerina): "*El agua es más pesada, entonces todo irá un poco más arriba porque es pesada.* ¿Por qué va menos arriba con la glicerina? *Porque la glicerina es más liviana. Pésala* (dos volúmenes iguales). *Me equivoqué, es al revés.* Entonces ¿por qué sube menos cuando es más pesado? *Porque no tiene bastante fuerza para subir más arriba.*" (Hay contradicción: el peso implica la fuerza, pero el de la glicerina no lo consigue.)

Estos hechos presentan un cierto interés desde un doble punto de vista: la física del niño y sus operaciones lógicas. Desde el primer punto de vista, no hay acción y reacción, la fuerza de la presión ejercida por el pistón y las cajas desencadena en el líquido una fuerza que es el resultado de su propio peso y que se halla orientada *en el mismo sentido.* Tenemos aquí un nuevo ejemplo de la influencia del esquema, de los dos motores,[3] común a esta edad: el motor externo desencadena la acción del motor interno y ambos concurren en la ejecución del mismo movimiento

[3] Véase Piaget, *La causalité physique chez l'enfant*, caps. I-V.

(este esquema aristotélico vuelve a encontrarse en el niño incluso en la explicación del movimiento de los proyectiles). Por cierto que estos mismos sujetos tienen cierta noción de la acción y la reacción en el caso de la balanza, pero se trata de una noción intuitiva (porque sólo se la vincula con los desplazamientos visibles) y sin generalidad operatoria: en la situación presente, no se encuentra su huella por más que el niño compare, por su propia cuenta, pesos progresivos de alcohol, agua y glicerina a volúmenes iguales, y compruebe la correspondencia inversa entre estos pesos y el ascenso del líquido en el tubo B (con las mismas cajas colocadas sobre el pistón del tubo A). La razón es que las operaciones concretas no bastan para asegurar la comprensión del esquema de la acción y la reacción. En efecto, si las agrupaciones de clases suponen la inversión y las de relaciones la reciprocidad, el mecanismo de las agrupaciones de clases y relaciones no permite reunir la inversión y la reciprocidad en un sistema operatorio único tal como el grupo *INRC*. Ahora bien, la comprensión de la igualdad entre la acción y la reacción supone la intervención, en el pensamiento, de un grupo de transformaciones lógicas en sentido estricto, y un grupo en el que no sólo entren en juego las operaciones inversas sino también las recíprocas: si las primeras aseguran la anulación (quitar un peso, por lo tanto, disminuir la presión), las segundas son necesarias para traducir las transformaciones iguales pero orientadas en sentido contrario; por lo tanto las simetrías no anulan un efecto por supresión, sino que lo hacen por compensación (la resistencia compensa la presión). Sin embargo semejante grupo implica por sí mismo las operaciones formales, es decir, el "conjunto de las partes" en oposición con las agrupaciones elementales.

La carencia de estas operaciones formales hace que el sujeto de este nivel no logre comprender las relaciones entre la acción y la reacción, así como, en el caso de los vasos comunicantes, sólo conseguía una reciprocidad espacial entre los descensos y los ascensos, sin descubrir la relación recíproca de las fuerzas en juego. Resulta, pues, claro que, en este subestadio II A, el fenómeno del equilibrio entre un líquido y un pistón de peso variable que ejerce una presión sobre él no se concibe como un proceso de equilibrio, sino como un proceso de sentido único: el pistón ejerce su fuerza sobre el líquido en el tubo de partida (*A*) y, a su vez, el líquido actúa no en sentido opuesto, sino (incluso en el tubo *B*) en el sentido adoptado por el pistón y sumando su propia fuerza (en razón de su peso respectivo) a la del pistón. Por otra parte la transmisión de la fuerza no presenta problema alguno porque no es en sentido estricto una transmisión: consiste todavía en un desencadenamiento o en una excitación de la fuerza del líquido por las del pistón y el peso colocado sobre él. De este modo la seriación de los pesos y la correspondencia entre ellos y los niveles logrados están aún lejos de constituir una expresión de la ley y *a fortiori* una comprensión de esta última.

§ 3. SUBESTADIO II B: INICIOS INTUITIVOS DE LA NOCION DE RESISTENCIA

Este estadio de 9 a 11 años constituye una etapa de transición, en la que el sujeto comienza a entrever que el líquido resiste en función de su densidad: un cierto número de niños ya afirman que el agua sube menos que el alcohol en el tubo *B* porque es más pesada. Pero ello no significa aún que dominen el problema desde el punto de vista de la acción y la reacción: en particular, piensan que el pistón se cae al fondo del tubo amplio *A*, como si se deslizara al fondo de un recipiente cualquiera; no se concibe aún que la columna de agua del tubo estrecho *B* ejerce una reacción en sentido inverso a la presión del pistón que se equilibra con ella, sino que se la concibe sólo como ejerciendo una pequeña resistencia al ascenso en función del peso del líquido.

Hid (10;3) prevé que *"va a subir acá* (B) *y acá* (A) *bajará.* (Experiencia.) *¡Ah! creía que subiría más arriba.* ¿Por qué? *Porque el pistón no descendió hasta abajo* (como creía) *y el agua no se fue hasta arriba.* ¿Y con esta caja (1 kg)? *Hasta acá* (más arriba). ¿Y si se la quita? *Volverá a bajar.* ¿Y con esta caja (2 kg)? *Irá más arriba porque es más pesada".* Se cambia el agua por alcohol: tiene la expectativa de obtener los mismos niveles: *"Fue más arriba.* ¿Por qué? *Porque él* (el alcohol) *es más liviano.* ¿Y con esta caja? *Allí* (un poco menos arriba que con el agua)."

Fra (10;10): *"El tubo* (o sea el pistón) *va a caer y el agua se desbordará porque, cuando se pone algo pesado en un recipiente lleno de agua, entonces hay un volumen de más y hace que se desborde."*

Haf (11 años) en oposición a Hid afirma que el agua se detiene más abajo que el alcohol porque ella es más liviana: *"No es el mismo líquido entonces.* ¿Por qué? *Tal vez pese menos* (el agua: se comenzó con el alcohol). ¿Por qué? *Va menos arriba, sin embargo... El líquido pesa menos. Seguro que es el líquido puesto que las cajas son las mismas. La primera vez* (alcohol) *el líquido era más pesado puesto que subió más arriba. Cuando el líquido es pesado, tiene más peso, más presión: desciende más rápido acá* (en *A*). Y acá (en *B*) ¿el líquido no hace presión? *No, ya que éste* (*A*) *va allá* (*B*)."

Estos razonamientos son muy claros y menos contradictorios de lo que parecen, ya que el sujeto piensa a veces en el líquido que desciende en el tubo *A*, otras en el que sube en el tubo *B*. Cuando razona acerca del tubo *A*, tiene entonces la expectativa de que el líquido más pesado desciende con mayor facilidad con la ayuda del pistón y, en consecuencia, que el nivel es más alto en *B* (Haf). Por el contrario, cuando razona acerca del tubo *B*, piensa que el líquido más pesado subirá con mayor dificultad y, en consecuencia, que el nivel será más bajo (Hid). Se trata, en

ambos casos, menos de una resistencia del líquido en el sentido de una reacción igual y de sentido contrario a la acción del pistón, que de una resistencia más o menos grande en el ascenso con facilidad más o menos grande en el descenso: por ello se piensa que el pistón se hunde sin resistencia alguna hasta la parte inferior del tubo *A*, como lo esperan Hid y Fra.

De este modo, en el último de los estadios anteriores a las operaciones formales, el sujeto logra una previsión exacta del efecto de los pesos sobre el pistón e incluso a veces una previsión del efecto de las densidades de los líquidos empleados, pero no deduce todavía una explicación de conjunto mediante un principio acerca del equilibrio. La razón es la ausencia de los instrumentos operatorios que permitan coordinar las inversiones y reciprocidades (el *grupo INRC*). Pero se le suma a ello sin duda alguna el hecho de que se concibe aún el peso, por más que se conserve y comience a cuantificarse, de modo absoluto (como una "presión" dice Haf) y no lo bastante en relación con el volumen: la densidad provoca ya la intuición de lo "lleno" o lo pleno, pero aún no las relaciones operatorias que constituirán, la densidad-compresión propia del estadio III.

§ 4. ESTADIO III: LA RECIPROCIDAD DE LA ACCION Y DE LA REACCION

El menor criterio de la aparición de la noción de reacción, o de resistencia orientada en sentido contrario al de la presión de los pesos, es la actitud del sujeto ante el descenso del pistón en el tubo *A*: mientras que hasta el momento se pensaba que el pistón se hundiría en un líquido sin resistencia que incluso tendería a bajar con él en función de su propio peso, a partir de ahora el pistón encuentra en su descenso una resistencia proporcional a la densidad del líquido. En cuanto a esta densidad, se la concibe de ahí en adelante como una relación entre el peso y el volumen, vale decir, como el resultado de una compresión más o menos grande de materia en un volumen igual. Pero para que esta compresión se convierta en una fuerza de resistencia, capaz de equilibrar la fuerza de la presión según un juego de compensaciones variadas, hasta llegar al punto de detener el descenso del pistón, es necesario que el sujeto introduzca una reciprocidad entre la densidad concebida como una compresión capaz de resistencia y la presión del peso; con otros términos: a las transformaciones de inversión (agregar o quitar pesos) se le suma una transformación de reciprocidad en un grupo único *INRC*. Ahora bien, esto es lo que sucede a partir del subestadio III A:

Tri (11;2): *"Es el peso de las cajas. Es esto* (pistón) *que empuja el agua.* Y si se cambia de líquido, ¿pasará algo) *Sí. Hay líquidos que son más o menos pesados.* ¿Si se toma el alcohol? *Creo que el alcohol es más pesado* (simple error de hecho). *Entonces subirá menos porque es más pesado para moverlo* (= ¡resistencia!). (Hace la experiencia sin que se haga comentario alguno de nuestra parte.)

No, el alcohol es más liviano. ¿Por qué ahora crees esto? *El alcohol es más liviano porque sube más.* ¿Qué hace? *Porque el peso de la caja lo hace subir más arriba. El peso* (de la caja) *puede empujar mejor.*"

Dum (11;2). Se pasa del agua al alcohol: "*Subirá menos porque el peso del líquido es más pesado.* El alcohol es más liviano que el agua. ¿Entonces? *Va a subir más arriba.* ¿Por qué? *Cuanto más liviano es el líquido, menos* (retenido) *estará el pistón.* ¿Menos qué? *Puesto que el alcohol es más liviano que el agua, el pistón descenderá más.* ¿Habías dicho 'menos'? *No, el pistón desciende más. El líquido es más liviano, entonces el pistón se hunde más.* ¿Por qué? *Porque el líquido es menos pesado que el agua.* ¿Y entonces el pistón se hunde más? *Porque el peso del alcohol retiene menos el pistón.*"

Ya (11;6) Las mismas reacciones: "¿Por qué el pistón no desciende hasta abajo? *Porque el pistón ya no tiene bastante fuerza para apoyar. Está retenido porque el líquido es más pesado que el pistón.*"

Riv (13 años): El agua va hasta ahí "*porque tiene que volver al mismo peso en los dos tubos.* ¿Pero por qué el agua no sube más arriba? *Porque el pistón no puede bajar más.* ¿Por qué? *Porque el agua lo retiene*". Apoya con la mano sobre el pistón, comprueba que éste vuelve a tomar su posición inicial y dice: "*Si se apoya sobre el pistón, el agua tiene más fuerza.*"

Estas respuestas muestran de modo nítido que a partir de entonces existen para el sujeto la acción y reacción. El peso del líquido, o con mayor precisión su densidad (ya que sólo hablan de peso en relación con el volumen) ya no es un factor que favorezca la presión del pistón, sino por el contrario un obstáculo a esta presión, por lo tanto, un factor cuya acción se orienta en sentido contrario y constituye así una reacción: en efecto, cuando el líquido es más liviano que el agua sube más arriba en *B*, porque el pistón reforzado por los pesos "puede empujar mejor" (Tri) o está "menos retenido" (Dum); por otra parte, en lo que se refiere al tubo *A*, el pistón "no puede descender" más allá de cierto punto "porque el agua lo retiene" (Riv y Ya).

El descubrimiento propio del nivel III A reside pues en que el sistema en juego constituye un equilibrio de fuerzas contrarias y ya no una sucesión de sentido único. Pero antes de intentar formular los razonamientos en juego, examinemos los dos problemas que tenemos aún que resolver: la manera según la cual se concibe la transmisión de la fuerza del pistón y el lugar donde la acción y la reacción logran la igualdad y se equilibran.

A partir del nivel III A se encuentra una solución a este primer problema, puesto que la presión del pistón no se considera ya como un desencadenamiento o una excitación de la propia fuerza del líquido (resultado de su peso), sino como una acción ejercida sobre la totalidad del líquido desde el punto de partida (descenso del líquido en el tubo *A*),

hasta el punto de llegada (ascenso y detención del líquido en el tubo *B*) y que provoca una reacción de sentido contrario que desemboca en un estado de equilibrio.

Pero, ¿dónde se encuentra el lugar de contacto en el que se produce este equilibrio? ¿Puede localizarse en un punto preciso o la totalidad del líquido entra en juego de próximo en próximo? Aquí debemos esperar la aparición del subestadio III B para que se aclare la cuestión. Las reacciones de este último subestadio son, en términos generales, análogas a las del nivel anterior; y, en lo que concierne a este último problema, varios sujetos del nivel III B se imaginan aún que existe un lugar particular donde las fuerzas contrarias se enfrentan: sería el "fondo" del tubo de goma que une los dos tubos de vidrio, es decir, el punto de encorvamiento más bajo del sistema. Otros, por el contrario, llegan a comprender que, desde el punto de contacto entre el pistón y el líquido hasta el nivel logrado por éste en el tubo *B*, se produce la acción y reacción: por una parte, la presión se hace sentir en el conjunto del líquido; pero por la otra como la reacción es una función de la densidad concebida como una compresión, surge por ello en cada punto del volumen ocupado por el líquido, de tal modo que en todas partes hay acción y en todas partes hay resistencia que tiende a rechazar la acción que se ejerce sobre este líquido, la acción y la reacción son pues iguales en todos los puntos.

Veamos un ejemplo de cada uno de estos tipos de respuestas:

Boi (14;6): "¿Si se coloca esta caja? *Subirá más arriba por causa de la presión* (Experiencia). ¿Por qué más arriba? *Las presiones en el fondo del tubo* (esto es, del tubo de goma) *son iguales.* ¿Cómo lo sabes? *Porque el aparato* (esto es, el pistón) *ni desciende ni sube y recíprocamente el agua ni sube ni desciende.* ¿Y cuando coloco una caja? *Es más pesada. Hay entonces una mayor columna de agua* (en *B*) *y también un mayor peso* (en *A*) *y esto se equilibra en el fondo del tubo.* ¿Por qué? *Porque la presión es la misma en el fondo del tubo.* ¿No explica la combinación de qué pesos se trata? *Sí, porque el agua es echada por el peso* (en *A*): *se equilibra en cierto momento porque el peso del agua* (de la columna de agua en *B*) *aumenta cuando sube.* ¿Qué es lo que hace subir al agua? *El peso de las cajas: ejerce una presión mayor en el fondo del tubo y esto saca el agua.*"

Iac (14;6): "*La presión es la misma* (de los dos lados) *en el fondo del tubo* (véase la idea de Boi). *No. El agua se equilibra si se comunica a través de un tubo y la presión se comunica en su totalidad.* ¿La altura desempeña algún papel? *No, el agua transmitirá la presión de la misma manera sean altas o bajas las dos columnas.*" En cuanto a la resistencia, también es la misma en todas partes.

De este modo vemos que las respuestas del subestadio III B (en las que se siente a veces la influencia de los conocimientos adquiridos, pocas cosas suman a las del subestadio III A que son más espontáneas.

§ 5. CONCLUSION: LOS RAZONAMIENTOS DEL ESTADIO III Y EL ESQUEMA OPERATORIO FORMAL DEL EQUILIBRIO

Para despejar las operaciones formales necesarias para la comprensión de las nociones de equilibrio o igualdad entre la acción y la reacción, recordemos en primer lugar que la causalidad es un sistema de operaciones aplicadas a las transformaciones de lo real, de tal modo que cada una de estas transformaciones pueda asimilarse a una operación del sujeto al mismo tiempo que se la concibe como una realización de los objetos mismos. Establezcamos pues, ante todo, las transformaciones que nuestros sujetos atribuyen al sistema aquí en consideración y busquemos luego a qué operaciones o transformaciones lógicas se asimilan estas modificaciones reales. Ahora bien, las principales transformaciones en juego en el sistema son las 4 siguientes:

I — La acción ejercida por la presión del peso del pistón y por los pesos sumados a su propio peso;

II — La supresión o disminución de esta acción, por eliminación de los pesos agregados o sumados por la del peso del pistón;

III — La reacción que corresponde a la resistencia del líquido, que constituye una presión, pero orientada en sentido inverso y dependiente de la altura y la densidad del líquido;

IV — La supresión o disminución de esta resistencia, por eliminación de una parte del líquido o por sustitución de un líquido de menor densidad.

Ahora bien, se comprueba que si las transformaciones (I) y (II) pueden asimilarse a operaciones directas e inversas, las transformaciones (III) y (IV) son en cambio simétricas respecto de las primeras: ellas también corresponden a operaciones directas e inversas en relación una con otra, pero actúan en sentido contrario a las dos primeras. La transformación (III) constituye pues una recíproca de la transformación (I): en efecto, (IV) es la inversa de (III), en cambio (III) no es la inversa de (I) puesto que no la anula, sino que sólo neutraliza su efecto mediante una compensación. En otros términos, la composición de (I) y (III) no termina en una anulación sino en una equivalencia, por lo tanto, en un equilibrio.

En consecuencia vuelve a encontrarse aquí un mecanismo isomorfo al grupo de las 4 transformaciones *INRC*. No debemos pues asombrarnos si también vuelve a encontrarse, en los propios razonamientos del niño, esta estructura *INRC* en una forma análoga a la que ya vimos funcionar a propósito de los vasos comunicantes, pero un poco diferente

ya que aquí estos razonamientos se refieren de modo directo a las presiones y resistencias:

I — La primera operación consistirá en enunciar la intervención de una presión en el tubo A bajo la influencia de un peso u otro: o sea $(p \vee q)$;

II — La operación inversa consistirá en enunciar la supresión de esta acción: o sea $(\overline{p} \cdot \overline{q})$;

III — Según los sujetos del estadio III, a cada presión p o q corresponde una resistencia cuyo enunciado designaremos con p' o q', o sea $(p' \vee q')$ y que se traduce, en la columna de líquido B, por el peso de las partes que superan el nivel de líquido en A;

IV — La inversa de III consistirá en enunciar la supresión de p' y q', o sea $(\overline{p'} \cdot \overline{q'})$.

Ahora bien, lo que caracteriza al estadio III es el descubrimiento de que las transformaciones (I) y (III) son recíprocas, vale decir, que entre ellas hay compensación. Pero, sostener que hay compensación equivale a considerar la intervención de una resistencia en B (expresada por p') como equivalente a la supresión de una presión en A: en efecto, el adolescente comprende que sin las resistencias en B, las presiones ejercidas en A harían subir el líquido mucho más arriba, y que a cada presión p corresponde una resistencia igual p'. Puede entonces escribirse $(p' \vee q')$ bajo la forma $(\overline{p} \vee \overline{q})$. De donde resulta:

1) $I \quad (p \vee q)$
$N \quad (\overline{p} \cdot \overline{q})$
$R \quad (\overline{p} \vee \overline{q})$
$C \quad \overline{(\overline{p} \vee \overline{q})} \; (= p \cdot q)$

Vemos entonces que la transformación (III) constituye en efecto la recíproca R de la transformación (I) y que (IV) es la correlativa C, esto es, la NR o la RN de la transformación (I), lo cual expresa de dos maneras (positiva R y negativa C) la equivalencia entre las presiones y las resistencias. En efecto, como la recíproca $(\overline{p} \vee \overline{q})$ de la operación $(p \vee q)$ es la operación simétrica en la que se encuentran las mismas combinaciones $(p \cdot q \vee p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q)$ y $(\overline{p} \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee p \cdot \overline{q})$ pero con permutación de los signos, expresa por lo tanto que se está ante fuerzas equivalentes, pero orientadas en sentidos contrarios, y se distingue así de la inversa N. Dicho de otro modo, la inversa anula la operación directa mientras que la recíproca no la anula, sino que la compensa mediante una operación simétrica del mismo valor pero con signos permutados.

Esa distinción entre la recíproca y la inversa constituye toda la dificultad del problema de la acción y la reacción y no puede obtenerse antes del estadio formal: hasta ese momento el niño comprende la operación

inversa (hacer que el agua descienda de nuevo en *B* mediante la supresión de un peso en *A*) pero no la operación recíproca a la que concibe como una simple prolongación de la operación directa y no como una operación simétrica orientada en sentido contrario y que compensa a la directa (o sea, el líquido no resiste la presión, pero se orienta en el mismo sentido). Porque para captar las 4 transformaciones I-IV, en los casos en que estas acciones respectivas no se diferencian por simple intuición como sucede con la balanza, debe poseerse un mecanismo operatorio que sólo las operaciones formales pueden constituir, de ahí el carácter tardío de este descubrimiento.

En cuanto a la fijación del punto de equilibrio, que se enunciará por medio de la proposición *r*, el sujeto Riv expresa sus condiciones cuando afirma que el agua se detiene en *B* en cierto nivel determinado "porque tiene que volver al mismo peso en los dos tubos". En otras palabras:

2) $r \supset [x(p \vee q) = y(\bar{p} \vee \bar{q})]$ donde x y y son los valores asignados a $(p \vee q)$ y a $(\bar{p} \vee \bar{q})$

A diferencia de lo que sucede con los vasos comunicantes, los puntos de equilibrio no constituyen una línea horizontal de un tubo al otro, sino que varían según los pesos $p \vee q$ y las resistencias que a su vez son función de la densidad de los líquidos. Salvo esta diferencia, la explicación del fenómeno supone el mismo esquema formal. No es entonces azaroso si los mecanismos de la acción y reacción se descubren en los mismos estadios III A y III B en el caso del pistón que actúa sobre un líquido, en el caso de los vasos comunicantes y, como vamos a verlo ahora, en el caso de la balanza. En los tres casos, la comprensión del proceso físico supone un esquema operatorio que pone a la vez en funcionamiento las transformaciones inversas y las recíprocas que permanecen separadas en el nivel de las agrupaciones concretas y que sólo se reúnen en un mismo todo a través del grupo *INRC*. Ahora bien, la diferencia entre el pensamiento concreto y el pensamiento formal, aquí como en todos los otros casos examinados, reside en la construcción del "conjunto de las partes": la doble reversibilidad propia de este conjunto (que admite a la vez a las estructuras de reticulado y a las de grupo) constituye el grupo *INRC*, mientras que las dos formas de reversibilidad permanecen separadas en las agrupaciones concretas elementales: la inversión en el caso de las agrupaciones de clases y la reciprocidad en el caso de las agrupaciones de relaciones.

CAPITULO XI

EL EQUILIBRIO DE LA BALANZA [1]

Con el problema de la balanza volvemos a encontramos con el esquema operatorio del equilibrio entre la acción y la reacción, pero hemos presentado los datos de tal modo que también planteen necesariamente la cuestión de las proporciones. En efecto, cuando dos pesos desiguales P y P' se equilibran a distancias desiguales del eje, L y L', es porque, para desplazarlos a alturas H y H' que corresponden a estas distancias, los trabajos PH y PH' son iguales. Se tiene pues la doble proporción (inversa):

$$P/P' = L'/L = H'/H$$

Resulta entonces que el descubrimiento de la ley supone la construcción de la proporción $P/P' = L'/L$ y que encontrar su explicación implica la comprensión de la proporción $P/P' = H'/H$. Nos pareció interesante estudiar cómo se elabora este esquema de la proporcionalidad en relación con el problema del equilibrio. En efecto, ya sabíamos por nuestras investigaciones anteriores que, en todos los dominios (espacio, velocidad, azar, etcétera), la noción de las proporciones sólo aparece en el estadio formal III A. Se trata ahora de establecer la razón de este fenómeno.

§ 1. ESTADIO I: INDIFERENCIACION ENTRE LA ACCION PROPIA Y EL PROCESO EXTERIOR (I A); LUEGO ARTICULACION DE LAS INTUICIONES EN LA DIRECCION DE LA COMPENSACION DE LOS PESOS (I B)

Desde los 3 hasta casi los 5 años, los sujetos presentan reacciones que resultan instructivas desde el punto de vista que aquí nos interesa. La causalidad en general constituye, como ya lo admitimos, una asimilación

[1] Con la colaboración de F. Matthieu y de J. Nicolas. Véase con referencia a este tema un estudio anterior de la señora Refia Ugurel-Semin, *Istanbul Univers. Yayinlari*, 1940, 110, págs. 72-211.

de los procesos en juego a las acciones propias del sujeto o a sus operaciones, pero acompañada por una delegación de ambas a la realidad misma. Ahora bien, en el caso de un dispositivo como el de la balanza o la hamaca, se construye muy temprano la noción de equilibrio entre el peso del propio cuerpo y otros pesos; se trata sin embargo de una noción indiferenciada que incluye, además de los pesos en sí, la fuerza muscular de un impulso realizado hacia arriba o incluso hacia abajo (por otra parte el peso se concibe en relación con las acciones levantar o presionar). La balanza se asimila pues en primer lugar a ese tipo de acciones indiferenciadas y no a un sistema de operaciones de compensaciones entre pesos ni *a fortiori* entre peso × longitud. En efecto, en este nivel no existe forma de operaciones concretas alguna, sino sólo regulaciones representativas, vale decir, instrumentos de compensación global, sin reversibilidad sistemática. A partir de esta doble situación resulta que los sujetos del nivel I A no logran asegurar el equilibrio por medio de una simple distribución de los pesos, sino que intervienen en el dispositivo mismo mediante sus propias acciones indiferenciadas de las acciones de los objetos reales:

Mic (4;6) ante dos muñecas de pesos iguales y que se hallan a las distancias 14 y 9: "¿Por qué una está abajo y la otra arriba? (Sube y baja sin cesar los brazos del aparato porque cree que así conservarán las fuerzas y posiciones que le delega.) ¿Puede colocársela (gesto horizontal) y que se quede así solo? (Ni sí, ni no.) ¿Cómo era antes? *Así* (horizontal). ¿No se lo puede conseguir con las muñecas? (Sacude la cabeza e intenta mantener la posición horizontal con dos pesos desiguales, subiendo y bajando los brazos varias veces.) ¿Lo puedes hacer sin usar tu mano?" ...Se le hace sopesar las muñecas, luego Mic se entrega a nuevos intentos. Se le sugiere que agregue muñecas una al lado de la otra, etcétera. Conclusión *"No se puede* (obtener la horizontal) (!)."

Mar (4:8) suspende dos muñecas del mismo lado sin colocar nada del otro lado, para obtener el equilibrio horizontal (!).

Se comprueba que el sujeto, al mismo tiempo que interviene siempre él mismo para rectificar la posición de los brazos de la balanza, espera que ella conserve los resultados de sus intervenciones. No se diferencian pues entre sí a la balanza y a la propia acción, pero esta indiferenciación —si excluye en efecto la idea de que la balanza constituye un mecanismo independiente— no excluye en cambio para nada la previsión de ciertos efectos más o menos constantes. Es cierto que para nosotros la dimensión más sorprendente de estas previsiones es en primer lugar su aspecto negativo. Por ejemplo el niño de este nivel no piensa aún que el equilibrio implica la igualdad de los pesos (incluso cuando las distancias son iguales): así Mar pone dos muñecas de un lado y ninguna del otro con el fin de obtener la posición horizontal. Lo pesado puede ir hacia arriba y lo liviano hacia abajo y viceversa. No

se establecen relaciones entre los pesos: el epíteto "demasiado pesado" puede aplicarse a una sola muñeca suspendida sobre un brazo, sin contrapartida alguna. No hay conservación del peso y el sujeto siempre busca obtener con nuevas muñecas, lo que acaba de lograr por azar con algunas de ellas sin ocuparse de las diferencias de peso. Sin embargo, estos sujetos logran, mediante regulaciones progresivas, reconocerle al peso una influencia relativa. En general, por lo menos suspenden una muñeca de cada lado, por la necesidad de una simetría. Sucede a menudo que para mejorar el equilibrio, añaden nuevas muñecas a las anteriores, pero no lo hacen del lado donde falta peso (para igualar) sino allí donde el peso es mayor, porque piensan que las cosas funcionarán mejor con varios pesos.

Esta acción de agregar, muy característica de este nivel, no es aún en absoluto operatoria, por más que sin duda constituye el comienzo de la operación aditiva. No lo es porque no hay igualación exacta entre las partes ($A + A'$) y el todo B (compensando $A + A'$ en el otro brazo). En particular no lo es porque no hay reversibilidad: no hay aún acciones de quitar pesos para obtener la igualación y, cuando el sujeto quita algún elemento, sólo lo hace con el fin de iniciar algo nuevo después de un fracaso.

En lo que se refiere a las distancias a partir del eje, en general el sujeto no se ocupa de ellas y no busca la igualdad, ni siquiera una coordinación cualquiera entre las distancias y el peso. No obstante, vemos perfilarse en esta dirección un comienzo de operación, en la medida en que a veces el sujeto establece un comienzo de simetría. Sin embargo, de nuevo aquí, no logra constituir una operación en sentido estricto; en primer lugar, por la carencia de una coordinación con los pesos y luego porque esta simetría se aplica sobre todo a los dos puntos extremos de los brazos, sin igualación para las distancias intermedias.

En cambio de los 5;6 hasta cerca de los 7-8 años se asiste a una articulación progresiva de estas representaciones intuitivas que se orientan en la dirección de la operación reversible:

Mal (5;8) comprueba que los brazos no son horizontales: *"Hay que colocar una* (otra muñeca) *del otro lado. Sé lo que hay que hacer: colocar de nuevo otra allá, porque aquí el peso no da* (agrega una). *Estas deben ser más livianas que aquéllas: hay que tomar dos que tengan el mismo peso."* Luego: *"Se podría quitar una* (porque de un lado es demasiado pesado)."

Mal no descubre de modo espontáneo la influencia de la distancia, pero cuando se desplaza ante ella una muñeca, dice: *"Usted acercó esto, da más peso: si estuviera en el extremo, no funcionaría y acá da más peso."*

Gas (5;9): *"Se podría colocar una del otro lado: la misma* (coloca una muñeca que, en efecto, es igual en cuanto al color del vestido pero cuyo peso es muy diferente). *No funciona: quizás allá hay demasiado peso."*

A partir de entonces el niño comprende que se necesita tener un peso de cada lado para obtener el equilibrio, e incluso los pesos tienen que ser más o menos iguales. Sin embargo no sabe proceder de modo sistemático para obtener esta igualación. A partir de entonces también consigue agregar y quitar pesos sin obtener igualaciones precisas: se trata de correcciones sucesivas, por lo tanto, de regulaciones y aún no de operaciones reversibles en sentido estricto.

Estas dos clases de regulaciones, por igualaciones y por agregados o supresiones, proporcionan así el punto de partida para las transformaciones futuras mediante reciprocidad (simetrías) e inversión, relativas a los pesos. En cuanto a las distancias existe un progreso marcado por la tendencia a la simetría (ya no sólo se colocan las muñecas a distancias iguales de los puntos extremos, también se las coloca en las regiones vecinas) y se descubre a veces el papel que desempeñan los cambios de distancia (véase Mal). Sin embargo, no hay aún correspondencias sistemáticas del tipo: más lejos = más pesado.

§ 2. SUBESTADIO II A: OPERACIONES CONCRETAS SOBRE LOS PESOS O LAS DISTANCIAS PERO SIN COORDINACION SISTEMATICA ENTRE ELLOS

A partir de este estadio se presenta, por una parte, la igualación y el agregado exactos de los pesos y, por la otra, la simetría y el agregado exactos de las distancias. Sin embargo la coordinación de los pesos y las distancias sólo da lugar aún a regulaciones intuitivas: el sujeto descubre por medio de ensayos y errores que puede haber equilibrio entre un peso más pequeño colocado a una mayor distancia y un peso más grande a una distancia menor, pero por el momento sólo deduce a partir de ahí correspondencias generales: [2]

Mas (7;7) comienza por E 3 y D 3, luego las reemplaza por G 3 y F 3 (por lo tanto, por distancias iguales y busca pesos iguales), añade otras muñecas, suprime algunas, luego quita todo y sopesa dos pesos iguales (E), cuenta un mismo número de perforaciones (14) y coloca E 14 de cada lado. Después, busca otras formas de equilibrio: agrega muñecas, las desplaza, quita algunas, y termina en GED por un lado y P 3 por el otro: *"Funciona justo* (compensación empírica de los pesos y las distancias). *Como cuando no había nada* (cuando los brazos sin carga estaban horizontales), *se tiene el mismo peso de cada lado."* Vuelve a empezar con grandes pesos (que no tienen equivalentes): *"Podría haber puesto uno de cada lado. Como no hay dos, tuve que poner tres de un lado y dos del*

[2] En adelante simbolizaremos a las muñecas según su peso creciente con las letras A, B, C, etcétera, y a las distancias crecientes (medidas por el niño con las perforaciones equidistantes en las que se fijan los ganchos de las muñecas) con las cifras 1, 2, 3, etcétera.

otro: se mantiene derecho porque de cada lado se tiene el mismo peso." Prevé que para dos pesos desiguales, se necesitan distancias desiguales pero no encuentra la ley: más pesado $\rightleftarrows$ más cercano: "Si colocamos *C* y *E* ¿dónde hay que ponerlos? *Diría en un agujero y en otro agujero* (o sea, en dos distancias diferentes) *pero no tiene que ser lo mismo* (o sea, distancias iguales), *si no, no se tiene el mismo peso.*"

Nem (7;4) encuentra en la experiencia que *C* a la izquierda, a una distancia de 10, equilibra a *E*, a la derecha, a una distancia de 5. Se le pide que coloque *C* a la derecha y *E* a la izquierda, pero no logra invertir las relaciones de distancia. Después de probar en la práctica, exclama: "*¡Ah! Hay que hacer lo mismo que antes, pero al revés.*"

A partir de entonces el sujeto puede entonces seriar los pesos presentes y determinar sus igualdades. Puede sumarlos de modo reversible y comparar con corrección dos conjuntos de pesos. Sabe utilizar además la transitividad de las relaciones de desigualdad o igualdad de los pesos. El conjunto de estas operaciones vuelve a encontrarse, por otra parte, en las comparaciones de las distancias, acompañadas además con el establecimiento de correspondencia entre las distancias orientadas en sentidos contrarios (simetrías en relación con el eje).

Estas operaciones, aplicadas a los problemas de la balanza, permiten entonces a los sujetos obtener los siguientes resultados (por multiplicación lógica de las relaciones):

Dos pesos iguales B_1 y B_2 situados a distancias iguales L_x se equilibran por simetría:

$$1)\ (B_1 \times L_x) = (B_2 \times L_x)$$

Se concibe pues que uno de los pesos compensa al otro por reciprocidad.

Dos pesos iguales B_1 y B_2 situados a distancias desiguales L_x y L_y no se equilibran:

$$2)\ (B_1 \times L_x) \gtrless (B_2 \times L_y) \text{ si } x \gtrless y$$

sin embargo el sujeto no puede coordinar las relaciones en juego.

Dos pesos desiguales $A_1 < B_2$ situados a distancias iguales L_x tampoco se equilibran:

$$3)\ (A_1 \times L_x) < (B_2 \times L_x)$$

Además, en cada una de estas relaciones compuestas, el sujeto puede sustituir mediante una aditividad un objeto por un conjunto equivalente de otros objetos:

$$4)\ C_1 = (A_2 + A'_2 + B'_2)$$

y sucede lo mismo para las distancias.

5) En cambio, en el caso de los pesos desiguales A_1 y B_2 y las distancias desiguales L_x y L_y no hay aún, durante ese subestadio II A, coordinación posible: incluso cuando el sujeto descubre en la experiencia que un objeto pesado colocado a una distancia pequeña y a la derecha equilibra un peso pequeño colocado a una distancia grande y a la izquierda, no sabe invertir estas relaciones de un lado al otro y sólo descubre a posteriori que había que hacer "lo mismo, pero al revés" (Nem).

§ 3. SUBESTADIO II B: CORRESPONDENCIA INVERSA DE LOS PESOS Y LAS DISTANCIAS

El quinto de los casos que acabamos de distinguir (pesos y distancias desiguales) encuentra su solución en el nivel II B, aún no mediante el empleo de proporciones métricas (excepto a veces en el caso de las relaciones de 1 a 2), sino mediante correspondencias cualitativas que permiten el logro de la ley de equilibrio: "Cuanto más pesado es, más cerca del medio está."

Fis (10;7) comprueba que *P* no equilibra a *F* "*porque es pesado: éste* (F) *es demasiado liviano*. ¿Qué se puede hacer? *Acercarlo* (empuja *P* del lado del eje y obtiene así el equilibrio). *Tuve que retroceder 16 agujeros* (arbitrario) *para ver si el peso disminuía dos veces* (arbitrario). ¿Qué quieres decir? *El peso se levanta*. ¿Y si se lo vuelve a colocar allí (alejar a *P*)? *Entonces el otro peso sube*. ¿Y si se lo coloca en el extremo (*P*)? *Subiría aun más* (F)", etcétera. Conclusión: Cuando se tienen dos pesos desiguales "*se acerca al más pesado* (más cerca del eje mediano)". Sin embargo, Fis no mide las longitudes incluso en el caso de las relaciones de 1 a 2.

Rol (10;10): "*Hay que cambiar la bolsa de lugar porque en el extremo tiene más peso*"; aleja del eje a la más liviana: "*Ahora es más pesada.*" Se presenta: *G* en 2 y *A* en 14: se equilibran "*porque aquél está acá* (A en 14), *es menos pesado*".

Se percibe la diferencia entre las reacciones. En el nivel II A y en presencia de dos pesos que no se equilibran entre sí, el sujeto opera sobre todo mediante sustituciones, adjunciones o supresiones. Logra así obtener ciertas igualaciones por desplazamientos, pero sólo lo logra de modo excepcional y por medio de ensayos y errores (regulaciones). En este nivel II B, por el contrario, el sujeto ante dos pesos desiguales busca el equilibrio mediante un desplazamiento orientado, a partir de la hipótesis que el mismo objeto "pesará más" cuando se lo aleje del eje y menos cuando se lo acerque a él. Se encuentra pues en el camino que conduce a la ley, pero se orienta sin proporciones métricas y mediante simples correspondencias cualitativas.

Interviene aquí una nueva operación en la determinación de las condiciones de equilibrio: una doble seriación de los pesos $A < B < C \ldots$ y las distancias $L_1 > L_2 > L_3 > \ldots$ pero con una correspondencia biunívoca inversa:

$$\begin{array}{ccccc} 5) & A & < & B & < & C & < \ldots \\ & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ & L_1 & > & L_2 & > & L_3 & > \ldots \end{array}$$

que puede traducirse por las reciprocidades (expresadas en la multiplicación de relaciones):

$$6) \quad (A \times L_1) = (B \times L_2) = (C \times L_3) = \ldots, \text{ etcétera.}$$

Sin embargo, resulta claro que estas operaciones cualitativas no bastan para establecer la ley. En efecto, las multiplicaciones lógicas del tipo (6) permiten un cierto número de inferencias, pero dejan ciertos casos en estado indeterminado:

7) Más pesado × igual distancia = mayor fuerza
Menos pesado × igual distancia = menor fuerza
Igual peso × más lejos (del eje) = mayor fuerza
Igual peso × menos lejos = menor fuerza

Sin embargo:

Más pesado × más lejos = indeterminado
Menos pesado × menos lejos = indeterminado

y

Más pesado × menos lejos = menos pesado × más lejos (pero sólo en ciertas condiciones métricas).

Sin embargo el sujeto de este nivel puede cuantificar los pesos (sabe que $B = 2A$; etcétera) y también las distancias (que pueden medirse por el número de perforaciones). ¿Por qué entonces debe esperarse la aparición del nivel formal III para que se constituya el esquema de las proporciones? Se responderá que éste es un problema de conocimiento escolar. Pero por el contrario vamos a proporcionar ejemplos (análogos a los ya estudiados en otras partes)[3] en los que el esquema de la proporcionalidad se constituye antes de cualquier enseñanza. Con toda probabilidad este esquema requiere, como condición necesaria y suficiente, un sistema

[3] Véase Piaget e Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, cap. XII, § 9; Piaget, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, cap. IX, §§ 2 y 3; Piaget e Inhelder, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, cap. VI, §§ 5 y 6.

operatorio cualitativo a la vez diferenciado y unificado, análogo al grupo INRC. La hipótesis es tanto mas plausible en la medida en que precisamente en este caso particular, se trata de un juego de acciones y reacciones en equilibrio, parecido al problema cuya comprensión analizamos en los capítulos IX y X.

§ 4. ESTADIO III: DESCUBRIMIENTO Y EXPLICACION DE LA LEY

Si nos limitamos a actuar como antes, vale decir, si dejamos que el sujeto suspenda sus pesos al mismo tiempo en los dos brazos de la balanza, se produce, a partir del nivel III A, el descubrimiento de la ley bajo la forma de la proposición $P/P' = L'/L$ (dónde P y P' representan dos pesos desiguales y L y L' las distancias que les corresponden). Sin embargo esta ley no da lugar a una explicación causal particular, incluso durante el subestadio III B, dada la transparencia con la que aparece ante el sujeto ("se trata de un sistema de compensaciones", como nos afirmará Chal). Pero, si se opera mediante suspensiones sucesivas y alternativas de los pesos, la atención del sujeto se concentra en las inclinaciones y las alturas que deben recorrerse; actitud que puede conducirle a una explicación de la ley por la igualdad de los trabajos (desplazamiento de las fuerzas). Es cierto que esa explicación, ya posible en el nivel III A, sólo aparece excepcionalmente incluso en el nivel III B: no obstante la hemos observado en varios casos y vale la pena analizarla.

En primer lugar veamos un caso de descubrimiento de la ley en el subestadio III A:

Rog (12;11) para un peso P colocado en el extremo de un brazo (28 perforaciones) coloca C + E en el medio del otro brazo, mide la distancia y dice: *"Son 14 agujeros. Es la mitad de la longitud. Si el peso* (C + E) *está en la mitad, se tiene el doble* (P). ¿Cómo sabes que hay que acercar el peso al centro (para que sea más pesado)? *Se me ocurrió, quise probar: si lo acerco en una mitad, el valor del peso disminuye en una mitad. Lo sé, pero no puedo explicarlo. No lo aprendí.* ¿Conoces otras situaciones semejantes? *En el juego de las bolitas, si 5 juegan contra 4, el último de los 4 tiene derecho a una bolita más."* Asimismo encuentra que para dos distancias de 1 y 1/4 hay que colocar pesos de 1 y 4; para dos distancias de 1 y 1/3, hay que colocar pesos de 1 y 3, etcétera: *"Se coloca el peso más pesado en la fracción que representa al peso más liviano* (o sea, que corresponde a la del peso liviano), *partiendo desde el centro."*

La rapidez con que el sujeto pasa de la correspondencia cualitativa a la proporción métrica parece en efecto indicar la presencia de un esquema anticipatorio. Ahora bien, la analogía que establece el sujeto entre la situación de la balanza y la del juego de las bolitas muestra que este

esquema proviene de las nociones de reciprocidad o compensación. Examinemos entonces de qué modo los sujetos que pertenecen al comienzo del subestadio III B actúan a partir de la misma idea y buscan una explicación en sentido estricto (con dispositivo de las suspensiones alternativas):

Chal (13;6) encuentra muy rápido que "*cuanto mayor es la distancia menor debe ser el peso. Se mantiene.* ¿Por qué? *Porque se compensan, acá y acá.* ¿Qué se compensa? *Las distancias y los pesos: se trata de un sistema de compensaciones. Cada uno sube por turno: a distancias iguales se necesitan pesos iguales y si se inclina, se restablece y desciende del otro lado.* (Se proponen dos unidades de peso a una distancia 5 y una unidad a la distancia 10.) ¿Cómo serán los ángulos? *Más grande de un lado* (muestra las dos unidades) *y más pequeño del otro* (experiencia). *¡Ah! No: los mismos ángulos.*" Los dibuja: "*La distancia se compensa con el peso.* ¿Qué camino recorren (se muestran las alturas *H* y *H'*)? *Un camino mayor con el peso más pequeño y con el peso grande un camino menor.* ¿Y qué fuerzas se necesitan (se muestran los hilos que permiten subir o bajar los pesos)? *Para el más pequeño hay que recorrer más distancia, para el más grande menos distancia.* ¿Entonces dónde se necesita más fuerza? *Aquí* (dos unidades). *¡Ah! No, es lo mismo: la distancia* (ahora habla de las alturas) *se compensa con el peso.*"

Sam (13;8) descubre enseguida que la distancia horizontal es la inversa del peso. "¿Cómo puedes explicarlo? *Se necesita más fuerza para alzar* (el peso situado en un extremo) *que cuando está más cerca del centro... porque hay que recorrer un camino más largo.* Cómo puede saberlo? *En el subibaja, si alguien es tres veces más pesado que el otro, se coloca a un tercio porque el camino a recorrer* (en altura) *es tres veces menor.* Pero una vez tú hablas de la distancia (gesto horizontal) y otra vez del camino a recorrer... *¡Ah! Depende de si hay que calcular o comprender. Para calcular más vale mirar la horizontal; para comprender es más fácil hacerlo en la vertical: para el liviano* (en el extremo) *va más rápido, para el pesado menos rápido.*"

Tis (13;8) descubre la proporción de 1 a 2 y dibuja las alturas: "*Si reemplazo este peso* (una unidad) *por aquél* (dos unidades) *sólo sube* (en el extremo) *una mitad...* (El camino en altura) *es mucho más largo cuando está en el extremo de la balanza que cuando está en el medio* (de un brazo). ¿Hay también compensación? *Sí, entre la fuerza y la altura.* ¿Cómo hay que medir? *Es más cómodo con la altura, pero en el fondo equivale a lo mismo* (que la distancia horizontal)."

Estas respuestas del estadio III (las del subestadio III A como las del III B) nos vuelven a colocar, por una parte, ante esquemas ya conocidos, los del grupo *INRC* bajo la forma que ya hemos encontrado (caps. IX y X); por la otra nos muestran en particular de qué modo ese esquema general del equilibrio se diferencia, en el caso actual, por la construcción de las proporciones $P/P' = L'/L$ y $P/P' = H'/H$. Los dos

problemas que deben entonces discutirse son los siguientes: la formación del esquema de las proporciones y también sus relaciones con el grupo *INRC*.

El grupo *INRC* se encuentra en primer lugar en estas respuestas bajo una forma que ya se podría haber descripto a propósito de las oscilaciones del líquido en los vasos comunicantes (cap. IX): cuando uno de los brazos de la balanza desciende por la influencia de un peso suspendido a una distancia dada, el otro baja a su vez por la influencia del mismo peso suspendido simétricamente a la misma distancia: "Cada uno sube por turno, dice Chal y si se inclina (por debajo de la horizontal) se restablece y desciende del otro lado." En ese sentido interviene pues una reciprocidad $(p \supset \bar{q}) = \mathrm{R}(q \supset \bar{p})$ donde p y q son los enunciados de los ascensos de las palancas. La novedad característica de la balanza reside en el hecho de que intervienen dos factores y que ellos se compensan: un peso P a una distancia L produce la misma inclinación, —cuando sólo él está en juego— que un peso $P' = nP$ a una distancia $L' = L/n$: Chal comprueba este fenómeno con asombro ("los mismos ángulos"), luego lo encuentra natural ya que "la distancia se compensa con el peso".

Por lo tanto, vuelve a encontrarse luego al mismo grupo *INRC* y bajo la misma forma que en el caso de las presiones y resistencias en el equilibrio de los líquidos (prop. 8, cap. IX y prop. 1, cap. X). A la operación que consiste en colocar pesos sobre uno de los brazos a distancias dadas pueden corresponderle dos clases de operaciones para restablecer el equilibrio: la inversa N que consistirá en quitar estos pesos o la recíproca R que consistirá en colocar pesos iguales a distancias iguales sobre el otro brazo de la balanza; y si la inversa N anula la operación inicial, la recíproca R la compensa sin anularla, aunque N y R desemboquen en el mismo resultado: obtener de nuevo la posición horizontal de los brazos. Las transformaciones descriptas en este sentido (prop. 8, cap. IX y prop. 1, cap. X) volverán a encontrarse aquí con tanta más facilidad en cuanto corresponden a una comprobación intuitiva muy simple y ya adquirida gracias a las correspondencias cualitativas del estadio II. Sin embargo, nuevamente aquí, debe sumarse a ello un hecho que constituye la particularidad propia de la balanza: las distancias compensan los pesos.

Bajo esas dos formas, relativas a las presiones y resistencias o a las oscilaciones e inclinaciones, el grupo *INRC* se duplica aquí con un esquema de proporciones: proporción inversa de las distancias horizontales y los pesos $P/P' = L'/L$ para las presiones y resistencias, y proporción inversa de las alturas y los pesos $P/P' = H'/H$ para las inclinaciones. Por otra parte, se le suma a ello una tercera proporción, esta vez directa, $L/L' = H/H'$ pero de carácter puramente geométrico y que resulta evidente para los sujetos (véase Tis: "En el fondo equivale a lo mismo" medir las distancias horizontales o las alturas). El problema consiste pues en establecer de qué modo se construyen estas primeras proporciones en

la mente de los sujetos: ¿de modo independiente y como resultado de una estructuración directa de la experiencia o en relación con el esquema operatorio del equilibrio, fundado en el grupo *INRC*?

§ 5. EL ESQUEMA DE LAS PROPORCIONES Y EL GRUPO *INRC*

Conviene recordar en primer lugar que en todos los dominios y no sólo en el caso de nuestras actuales experiencias, la comprensión de las proporciones no aparece antes del nivel III A. Se observa a menudo en los sujetos del subestadio II B la búsqueda de una misma relación en el interior de dos relaciones que se comparan entre sí, pero se concibe que la naturaleza de esa relación es aditiva: en vez de la proporción $P/P' = L'/L$, se tiene entonces una igualdad de las diferencias $P - P' = L' - L$. La formación de la idea de proporcionalidad supone pues que en primer lugar, se sustituyan las simples relaciones de diferencia por la noción de la igualdad de los productos $PL = P'L'$. Sin embargo importa además señalar que este pasaje de la diferencia al producto pocas veces se realiza de entrada bajo una forma métrica: por lo general la cuantificación numérica de la proporción se halla precedida por un esquema cualitativo fundado en la noción de producto lógico, vale decir, por la idea de que dos factores que actúan juntos equivalen a la acción de otros dos factores reunidos. "Cuanto mayor es la distancia, menor debe ser el peso", dice Chal como resultado de una simple correspondencia cualitativa (véase prop. 5), pero añade "se mantiene"; en otros términos un peso pequeño más una gran distancia equivale a un peso grande más una distancia pequeña. Ahora bien, estas multiplicaciones lógicas ya se esbozan en el nivel II B (véanse prop. 6 y 7) pero no hay generalización a todos los casos posibles. ¿De dónde proviene entonces la generalización propia de los niveles III A y III B? Aquí intervienen sin duda alguna las nociones de compensación y reciprocidad vinculadas con el grupo *INRC*.

En efecto, resulta evidente que si el sujeto del estadio III se halla en condiciones para comprender las transformaciones por inversión (N) y reciprocidad (R) y para agruparlas en un sistema único (I, N, R y $NR = C$), consigue por ello mismo utilizar la igualdad de los productos en forma mucho más general que en el caso de las multiplicaciones de relaciones (6) y (7), y además en una forma tal que ya implica las nociones de compensación y anulación: la posibilidad de razonar de acuerdo con una estructura de grupo *INRC* significa la comprensión de las igualdades $NR = IC$; $RC = IN$; $NC = IR$, etcétera, que son igualdades entre productos de dos transformaciones. Resulta entonces que el grupo *INRC* equivale a un sistema de proporciones lógicas:

$$\frac{I_x}{C} = \frac{R_x}{N} \quad \text{o} \quad \frac{R_x}{I} = \frac{C}{N}$$

puesto que IN = RC (donde x = la operación transformada por I, N, R o C).

Examinemos, por ejemplo de qué modo razonan los sujetos acerca de los cambios de peso y distancia horizontal (dejando de lado, para simplificar las anotaciones, los pesos y las distancias que permanecen constantes). Llamemos p al enunciado de un aumento determinado de peso y q al de un aumento determinado de distancia, y llamemos $\bar{p}$ y $\bar{q}$ a las proposiciones que enuncian una disminución correspondiente de peso y distancia en un mismo brazo de la balanza. Las proposiciones p' y q' corresponderán a p y q, y $\bar{p}'$ y $\bar{q}'$ a $\bar{p}$ y $\bar{q}$ en el otro brazo. En isomorfismo con la proposición 1 del capítulo X, los sujetos comprenderán entonces las siguientes relaciones de inversión y reciprocidad (grupo *INRC* pero eligiendo $p \cdot q$ como operación idéntica I):

8) I $(p \cdot q)$ = aumentar a la vez el peso y la distancia en uno de los brazos

N $(\bar{p} \vee \bar{q}) = (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ = disminuir la distancia aumentando el peso o disminuir el peso aumentando la distancia o disminuir los dos

R $(p' \cdot q')$ = compensar a *I* aumentando a la vez el peso y la distancia en el otro brazo de la balanza

C $(\bar{p}' \vee \bar{q}') = (p' \cdot \bar{q}') \vee (\bar{p}' \cdot q') \vee (\bar{p}' \cdot \bar{q}')$ = anular a *R* de la misma manera que *N* anula a *I*

Ahora bien, como $R\,(p' \cdot q')$ equivale a compensar la acción $I\,(p \cdot q)$, por una reacción (simetría) en el otro brazo de la balanza, podemos escribirlo $\bar{p} \cdot \bar{q}$; y como $(\bar{p}' \vee \bar{q}')$ equivale a compensar la acción *N* también por simetría, podemos escribirlo $(p \vee q)$. La proposición (8) puede entonces formularse como sigue:

8 bis) I $(p \cdot q)$
N $(\bar{p} \vee \bar{q})$
R $(\bar{p} \cdot \bar{q})$
C $(p \vee q)$

El sistema de estas transformaciones, que no expresan otra cosa sino el equilibrio de los pesos y las distancias, equivale entonces sin más a la proporcionalidad: [4]

[4] Esta proporción lógica significa lo siguiente:

a) $(p \cdot q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q}) = (\bar{p} \cdot \bar{q}) \cdot (p \vee q) = 0$ ya que $I \cdot N = R \cdot C$
b) $(p \cdot q) \vee \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} = (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee \overline{(p \vee q)} = (p \star q)$ ya que $I \vee N = R \vee C$
c) $(p \cdot q) \cdot \overline{(\bar{p} \cdot \bar{q})} = (p \vee q) \cdot \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} = (p \cdot q)$ ya que $I \cdot (NR) = C \cdot (NN)$
d) $(p \cdot q) \cdot \overline{(p \vee q)} = \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} = 0$ ya que $I \cdot (NC) = R \cdot (NN)$

9) $\frac{p \cdot q}{p \cdot \bar{q}} = \frac{p \vee q}{p \vee \bar{q}}$ o sea $\frac{I_x}{R_x} = \frac{C_x}{N_x}$ (donde $x = p \cdot q$)

En otros términos, apenas el sujeto comprende el sistema de las inversiones y reciprocidades (8 y 8 bis) captará en el hecho mismo que el aumento del peso y la distancia en un brazo de la balanza es al aumento simétrico en el otro brazo como el aumento del uno o la otra en un brazo es a la operación *recíproca en el otro brazo, etcétera.*

Ahora bien, a partir de este esquema cualitativo de proporciones lógicas, que corresponde sin duda a una intuición global de la proporcionalidad de la que parte el sujeto, resulta fácil pasar a las proporciones lógicas más detalladas (a una sola proposición) y de ahí a las proporciones numéricas.

Recordemos en este sentido que, para una sola proposición p, la correlativa C es idéntica a I y la recíproca R idéntica a N. Así de la proporción (9) se extrae:

10) $\frac{p}{q} = \frac{\bar{q}}{\bar{p}}$ de donde $p \vee \bar{p} = q \vee \bar{q}$

vale decir que el aumento del peso es al aumento de la distancia como la disminución de la distancia es a la disminución del peso.

Por otra parte, además de las proporciones directas, del tipo (9) y (10), el grupo *INRC* implica lo que puede llamarse proporciones recíprocas en las que uno de los productos cruzados es la recíproca R del otro:

11) $\frac{p \cdot q}{\bar{p} \cdot \bar{q}} = R \frac{\bar{p} \vee \bar{q}}{p \vee q}$ o sea $[(p \cdot q) \cdot (p \vee q) = p \cdot q] =$
$= R\,[(\bar{p} \cdot \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q}) = \bar{p} \cdot \bar{q}]$

De ahí, en virtud de (10) y de (11), se extrae la proporción recíproca:

12) $\frac{p}{q} = R \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$ o sea $(p \cdot \bar{q}) = R\,(\bar{p} \cdot q)$

Vemos entonces enseguida que estas dos proporciones lógicas (11) y (12) son isomorfas a las proporciones numéricas que pueden obtenerse cuando se tiene un mismo coeficiente n para el aumento del peso (p) o la distancia (q). En efecto, si $p = nP$ y $q = nQ$, entonces:

13) $\frac{p}{q} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$ corresponde a $\frac{nP}{nL} = \frac{n:L}{n:P}$ por ejemplo $\frac{2 \times 4}{2 \times 8} = \frac{2:8}{2:4}$

y

14) $\frac{p}{q} = R \frac{\bar{p}}{\bar{p}}$ corresponde a $\frac{nP}{nL} = \frac{P:n}{L:n}$ por ejemplo $\frac{2 \times 4}{2 \times 8} = \frac{4:2}{8:2}$

Estas fórmulas, de la (9) a la (14), pueden parecer muy abstractas para explicar los razonamientos efectivos de nuestros sujetos. En realidad y por supuesto con independencia del simbolismo introducido por nosotros, es sin embargo efectivamente así como se descubren las proporciones. Antes de introducir números como medidas del peso y la distancia, el sujeto comienza en general por formular lo siguiente:

15) $p \cdot \bar{q} = R(\bar{p} \cdot q)$

(aumentar el peso y disminuir la distancia en uno de los brazos equivale a lo mismo que disminuir el peso y aumentar la distancia en el otro brazo).

Ahora bien, esta proporción (15) no es otra sino la proporción (12), que entonces implica a (10) y (9) y conduce a la proporción métrica (14). Las fórmulas que preceden pueden pues considerarse como la expresión simbólica de los razonamientos efectivamente observados.

En cuanto a la proporción entre los pesos y las alturas, todos los sujetos, colocados ante el dispositivo de las suspensiones alternativas, comprenden en primer lugar que un aumento de distancia q implica un aumento determinado de altura (r), por lo tanto que:

16) $q \underset{c}{\supset} r$

Resulta entonces que las proporciones (10) y (12) implican:

17) $\frac{p}{r} = \frac{\bar{r}}{\bar{p}}$ y 17 bis) $\frac{n}{r} = R\frac{\bar{p}}{\bar{r}}$

Por último, el transporte de un peso a una cierta altura constituye un trabajo, fenómeno que nuestros sujetos expresan a su manera ya que carecen de un vocabulario físico preciso: "Más distancia a recorrer" (Chal) o "más fuerza para alzar" (Sam). Si un peso grande situado a una (distancia pequeña se equilibra con un peso n veces más pequeño, situado a una distancia n veces más grande, sucede pues así en fin de cuentas porque los trabajos son iguales para levantar al primero a una cierta altura que para levantar el segundo a un nivel n veces más elevado: como lo afirma Fis, existe una compensación "entre la fuerza y la altura". Esta igualdad de los trabajos, percibida durante el estadio III, proporciona así la razón para explicar el fenómeno del equilibrio. Pero si bien en este último punto la reacción de los sujetos citados no resulta bastante espontánea, la experiencia siguiente, en la que se reemplaza el dispositivo demasiado simple de la balanza por una tracción sobre un plano inclinado, nos mostrará de qué modo la noción de trabajo se elabora a partir del nivel concreto II B y se utiliza en las explicaciones del estadio formal III.

CAPITULO XII

LA TRACCION DE UN PESO SOBRE UN PLANO INCLINADO [1]

Nuevamente se enfrenta a los sujetos con un problema acerca del equilibrio, muy parecido al de la balanza, pero con una clara manifestación de las relaciones de trabajo: se arrastra sobre un riel un pequeño vagón al que pueden dársele diferentes inclinaciones. El problema consiste en la previsión de los movimientos o las posiciones de equilibrio del vagón en función del peso con el que se lo carga, el contrapeso suspendido al cable y la inclinación. Sabemos que la inclinación interviene no en función del ángulo medido en grados, sino de su seno, vale decir que interviene en realidad en función de la altura h (variable). La ley de equilibrio a encontrar es pues la siguiente $P/M = h/H$ en la que P es el contrapeso (variable), M el peso del pequeño vagón (en sí pesa 4 unidades pero además se lo puede cargar con pesos variables) y H la altura total (la longitud constante del riel se supone vertical).

§ 1. ESTADIO I: INDIFERENCIACION ENTRE LA PROPIA ACCION Y LOS PROCESOS OBJETIVOS

El interés del estadio I reside en que el sujeto explica los fenómenos invocando sobre todo al conjunto de las acciones que puede ejercer sobre el dispositivo:

Bac (6 años) empuja el vagón para que baje: "¿Desciende? *No, sube.* ¿Se puede hacer otra cosa? *Empujarlo con el dedo.* ¿Y para hacerlo subir? *Manejar en el tren.* ¿Y con los pesos? (Carga el contrapeso.) *Puse algo.* ¿Por qué sube? *No sé. Porque está pesado.* ¿Y para hacerlo bajar? *No sé; empujarlo.*"

Her (6 años): "¿Qué se puede hacer? *Hacer caminar al vagón.* ¿Cómo? *Con el hilo* (tira). ¿Y para que ande solo? *Quitar los pesos* (a P), *poner los pesos en el vagón* (quita dos unidades a P para cargar M). ¿Qué otra cosa puede ha-

[1] Con la colaboración de A. Morf y H. Olivieri, G. Mercier y D. Royo.

cerse? *Colocar el riel más arriba* (lo coloca a 45 grados). ¿Subirá? *No, bajará* (sube). *Hay que empujarlo.* Y si se coloca más arriba, ¿subirá? *No, bajará porque está inclinado.* ¿Qué hay que hacer para que suba? *Tirar* (se baja el riel). *Hay que empujarlo* (lo empuja con la mano)."

Bel (6;6): "*Esto* (P) *es para tirar.* ¿Qué hay que hacer para que ande? *Hay que bajar esto* (disminuye la inclinación). ¿Y qué hará el vagón? *Bajará* (experiencia). *¡Sube!* ¿Por qué? *Porque está arriba.* ¿Y para hacerlo bajar? *Hay que subir la línea* (se la sube y se coloca una unidad de peso en el vagón y dos en P). *¡Todavía sube! No puede descender...*"

Para estos sujetos, el dispositivo no constituye aún un conjunto independiente de causas y efectos, sino que se solidariza con las propias acciones ejercidas sobre él desde el exterior. Esto es cierto en dos sentidos complementarios: en primer lugar, porque el sujeto no busca aislar vínculos exteriores a su acción sino que sitúa sus intervenciones en el mismo plano que las causas objetivas y, luego, porque todavía se conciben a estas causas a través de una asimilación con los esquemas de la propia actividad: el peso es una fuerza capaz de tirar y empujar, etcétera. Ahora bien, la causalidad constituye en efecto, y en todos los niveles de evolución, una asimilación de las transformaciones de lo real con las acciones u operaciones del sujeto, y con delegación de su poder a lo real mismo; lo cual equivale a decir que, cuando el sujeto tiene acceso al nivel operatorio suficiente, concibe las modificaciones de lo real como isomorfas a las mismas transformaciones operatorias. Sin embargo cuando la actividad del sujeto consiste en acciones de sentido único no coordinadas en sistemas operatorios, lo real es representado como un conjunto de poderes también incoordinados y sin diferenciación posible entre ellos y las propias acciones.

§ 2. SUBESTADIO IIA: DETERMINACION DEL PAPEL DE LOS PESOS SIN COORDINACION OPERATORIA CON LAS INCLINACIONES

De ahí en adelante el sujeto busca componer los pesos del pequeño vagón con los contrapesos porque se trata de dos factores homogéneos. En cuanto a la inclinación de la vía, percibe en efecto que desempeña un papel, pero no se halla aún en condiciones para coordinarla con los pesos:

God (7 años): "¿Qué hay que hacer para que ande el vagón? *Tirar.* ¿Y si no? *Entonces empujarlo.* ¿Y si no se lo empuja? *Quitar la carga* (quita dos unidades de peso del vagón, que enseguida sube). ¿Y qué otra cosa? *Sí, poner un peso* (coloca las dos unidades en P). ¿Y otra cosa más (se le muestra la movilidad del riel)? *Hay que ponerlo un poco más bajo.* Bien, y si ahora agrego aquí (dos unidades a P) ¿qué sucederá? *El vagón subirá.* ¿Y si coloco cargas en el vagón? *Se queda*

en su lugar (experiencia). ¿Entonces qué hay que hacer para que suba? *Hay que colocar un peso más* (agrega uno en P). ¿Y si no puedo? *Hay que disminuir aquí* (M)." Se establece un equilibrio para una inclinación dada: "¿Y si se baja la vía? *Pienso que se quedará en el mismo lugar* (vale decir: los pesos se equilibran con independencia de la inclinación). (Experiencia: sube.) ¿Por qué? *Porque aquí había varios pesos* (P)."

Fer (7;10). Igual comienzo, luego para que el vagón suba hay que "*quitar cargas* (M) *y colocar pesos* (P). ¿Y si sólo quito una carga sin agregar pesos? *No sale.* (Experiencia.) *¡Sale!* Y para que baje ¿qué se puede hacer? *Subir la línea: levantar la línea y quitar un peso* (P)". Pero en sus previsiones Fer sólo toma en cuenta las relaciones de peso como si el equilibrio fuese siempre el mismo en el caso de determinados pesos con independencia de la inclinación.

El progreso realizado respecto del estadio I resulta claro. Hay composición reversible de los pesos: agregar una unidad al contrapeso P equivale a quitar una carga del mismo valor al pequeño vagón (M), etcétera. Sin embargo sólo se trata de composiciones simples; el punto de partida consiste en suponer que la simple equivalencia de los pesos asegura el equilibrio de M y P, como si se tratase de una balanza (con igualdad de las distancias respecto del eje). Sin embargo el factor inclinación ya desempeña un papel parcial: el sujeto prevé que al aumentar la pendiente se favorece el descenso. Pero, por el contrario, no comprende que al aumentar la pendiente se disminuye la acción ejercida por los contrapesos y que, para subir el vagón por una pendiente con inclinación más fuerte, se necesitan más pesos en P que en el caso de una pendiente con inclinación más suave. Por lo tanto la inclinación simplemente constituye un factor coadyuvante pero aún no un factor general que pueda componerse con los restantes.

§ 3. SUBESTADIO II B: DESCUBRIMIENTO DEL PAPEL GENERAL DE LA INCLINACION Y COMIENZOS DE LA NOCION DE TRABAJO

Los sujetos de este subestadio comprueban de entrada la presencia de tres factores: el peso del vagón, el contrapeso y la inclinación. Por otra parte, descubren poco a poco que el equilibrio de los pesos no depende de las simples igualdades, sino que varía en función de las inclinaciones. Intentan entonces encontrar las relaciones, actitud que los lleva a darse cuenta de que se necesita un mayor trabajo para arrastrar un mismo peso sobre una pendiente más inclinada que sobre una menos inclinada:

Bou (9;6) observa de entrada los pesos *P* y *M*, luego pregunta: "*¿Por qué está esta curva* (inclinación)? *¿Puede cambiársela?* ¿Te gustaría que se cambiara la pendiente? *Sí, para ver cómo funciona. ¿Podría colocar otro peso?* ¿Adónde? *Aquí*

(P): *tal vez el vagón correrá más rápido. Si el peso es bastante pesado el vagón subirá, si no es bastante pesado se quedará en su lugar.*" Realiza diversas pruebas. "*Si se coloca más peso* (en P) *sube aun más rápido* (coloca hasta 7 unidades). *No puede descender más porque hay demasiado peso* (quita pesos en P: el vagón desciende). *Si coloco menos pesos, desciende.*" Después: "*No quiero poner ningún peso* (en P) *porque quiero ver si se queda abajo o si sube más lentamente.*" El vagón desciende: entonces modifica los pesos de *M* para ver si "*pasa algo si se colocan varios pesos aquí* (carga M). *Va todavía demasiado rápido* (quita pesos en *P* y añade algunos en *M* hasta obtener la igualdad). *Los pesos son iguales porque tengo 4 pesos aquí* (P) *y 4 en el vagón* (el vagón sigue todavía andando: agrega 2 y 2; 0,5 y 0,5; luego 3 y 3). ¿No se mueve? *No, ¡igual se mueve!*". Descubre pues que la igualdad de los pesos no asegura el equilibrio. "Al comienzo me preguntaste para qué servía esta curva, ¿te acuerdas? *¡Ah! sí, se puede bajar la vía, entonces el vagón subirá.* ¿Estás seguro? *Más bien va a subir* (baja la vía en posición 1 y el vagón sube), *porque ahora la pendiente es menor, entonces es más fácil que suba.*" Bou modifica entonces las inclinaciones y comprueba que cuando la vía se halla en posición vertical "*el peso* (P) *va a tirar al vagón*" porque el contrapeso es suficiente; pero no lo hace variar. Con 45 grados de inclinación y una unidad en P, comprueba que el vagón desciende y se ríe: "*Pensaba que iba a subir porque incluso sube cuando está en línea recta.*" Luego, al comprobar que también desciende con 30 grados: "*Hay que agregar o quitar pesos. Hay que probar cuando uno ve que sube o baja demasiado.*" Sin embargo, no logra hacerlo de modo sistemático.

Jan (10;8): "*Para hacerlo subir, hay que colocar un peso más pesado aquí* (P). ¿Qué otra cosa puede hacerse? *Descargar el pequeño vagón.* ¿Y para que el vagón se quede en su lugar? (Coloca 4 unidades en el vagón y 4 en P.) *Es el mismo peso. No, no anda.* ¿Se puede hacer algo con la vía? *Tal vez bajarla: el vagón avanzará más fácilmente porque la línea es menos alta.* ¿Si se alza la vía y se agregan pesos? *Se quedará igual porque es más difícil que suba.*" Luego pesa el pequeño vagón y comprueba que vale 4 unidades: "Entonces si se coloca el vagón vacío y 4 pesos aquí (P), ¿se quedará en equilibrio? *No, subirá* (comprende entonces que el equilibrio depende de la inclinación). ¿Y si se sube la vía? *Es más difícil que suba.* ¿Por qué? *Porque el vagón se vuelve más pesado.*"

Los dos progresos principales realizados durante este estadio son entonces la comprensión del hecho de que el equilibrio no es el resultado de una simple igualdad de los pesos y la comprensión del papel de la inclinación que requiere un "trabajo" superior.

En cuanto al equilibrio de los pesos, el sujeto descubre en primer lugar que, al colocar *n* unidades en el contrapeso P y *n* en el vagón M no se asegura el equilibrio; luego se da cuenta de que el vagón mismo tiene un peso de 4 unidades, pero que P = 4 y M tampoco se equilibran (sólo lo hacen si la vía se halla en posición vertical) comprobación que conduce al sujeto al problema de la inclinación.

En efecto, ya sea por la razón precedente o bien porque modifica de modo directo la inclinación, el niño de este nivel descubre en particular el papel de la pendiente. "Ahora la pendiente es menor, dice Bou, entonces es más fácil que suba." "El vagón avanzará más fácilmente, dice Jan, porque la línea es menos alta." Aun más, el niño comprende que al aumentar al mismo tiempo la inclinación y el contrapeso, se conservará el equilibrio "porque es más difícil que suba". Por último, prevé que cuando los pesos en *P* y *M* son iguales el vagón subirá y que si además se aumenta la pendiente "se vuelve más pesado" (!).

Esos últimos propósitos resultan muy instructivos y muestran de qué modo la inclinación se hace homogénea al peso y se compone con él en forma de trabajo: un peso grande que tiene que subirse poco equivale a un peso más liviano que tiene que subirse mucho, ya que entonces la altura compensa el peso, lo que equivale a decir que el trabajo es el mismo. Jan lo expresa del modo más directo cuando declara que si se aumenta la pendiente "el peso se vuelve más pesado". El sujeto que no conoce el paralelogramo de las fuerzas —en el cual la parte de peso soportado por la vía (que alivia en la misma proporción al peso del vagón) es tanto mayor cuanto menos inclinada es la vía, mientras que la parte no soportada por la vía es tanto mayor cuanto más inclinada es— consigue sin embargo tener una intuición bastante exacta de la relación entre el peso y la inclinación: la noción de trabajo es pues accesible a partir del nivel concreto en forma cualitativa, como resultado de la multiplicación de las relaciones de altura y peso.

Ahora bien, resulta sorprendente que esa relación inversa entre el peso y la altura, característica del equilibrio del pequeño vagón, y que esa construcción de la noción de trabajo como desplazamiento de un peso en altura se constituyan en el nivel II B del mismo modo que el descubrimiento de la correspondencia inversa entre los pesos y las distancias en el caso de la balanza. Se trata de la misma ley física; sin embargo el niño no lo sabe puesto que frente a la balanza no piensa ni en el trabajo ni en la altura (salvo cuando se presenta la experiencia con el dispositivo de las suspensiones alternativas: véase § 4, cap. XI) y que ante la actual relación entre las inclinaciones y los pesos no piensa en la balanza. Todo sucede entonces como si, en cierto nivel de evolución, la estructuración de un dominio delimitado como es el del equilibrio de los pesos en función de las distancias y alturas provocase al mismo tiempo el conjunto de las operaciones concretas posibles en este sentido.

Las lagunas de este nivel II B consisten en cambio en que el sujeto no logra enunciar la ley en su conjunto. Es cierto que toma en cuenta a los tres factores: P, M e inclinación y los compara sucesivamente de dos en dos sin modificar al tercero. Sin embargo cada vez que mantiene invariante a uno de los factores no lo hace con intención: no lo hace con el fin de construir una prueba mediante el método "permaneciendo igual todo lo demás", sino por una razón más simple, al comparar dos factores

ya no piensa en el tercero y de este modo deja invariables a las cosas sin pensar en ello. No llega pues a construir la ley porque carece de la coordinación de conjunto simultánea.

Las razones de ese fracaso en la coordinación de conjunto son fáciles de encontrar y se reducen a dos razones principales, ambas inherentes a la naturaleza de las operaciones concretas. La primera consiste en la complejidad demasiado grande de las correspondencias en juego si se procede mediante parejas o tríos sucesivos. Es cierto que el sujeto podría llegar a establecer un inventario suficiente, puesto que posee las operaciones necesarias para hacerlo. No volvamos sobre la seriación, la igualación y la aditividad de los pesos ya descriptas en el caso de la balanza (cap. XI, §§ 2 y 3). El sujeto también está en condiciones de establecer una seriación de las inclinaciones. Podría entonces, si así lo quisiera, establecer sucesivamente la correspondencia entre los pesos del vagón (M) y los del contrapeso (P), para cada inclinación, de tal modo que el vagón se quede en equilibrio, baje o suba. Pero se percibe entonces el tipo de complicación a la que llevaría el cuadro de triple entrada construido a partir de las determinaciones empíricas. El sujeto ni siquiera piensa entonces en su construcción y se contenta con algunos casos particulares: ésta es la primera razón de su fracaso.

La segunda razón es la siguiente: si en vez de proceder mediante correspondencias sucesivas, el sujeto intenta utilizar la forma de cálculo lógico que se encuentra a su disposición, esto es, la multiplicación de las relaciones —y así es como procede en la determinación de las relaciones de trabajo— entonces un cierto número de productos permanecen indeterminados. En efecto, vuelve a encontrarse en este sentido la situación paralela a la que examinamos en el caso de la multiplicación lógica de los pesos y las distancias que interviene en la balanza (cap. XI, prop. 7). Al partir de un punto de equilibrio:

$$\text{Inclinación } x \leftrightarrow [P_y \leftrightarrow M_z]$$

el sujeto puede concluir que si se aumenta la pendiente x y se deja invariante y y z, el vagón desciende, si se disminuye x el vagón sube, etcétera. Pero, si se aumenta la pendiente x y también se aumenta el contrapeso P ($> y$), o si se aumenta la pendiente x y se disminuye la carga del vagón M ($< z$), entonces el producto se halla indeterminado: la doble relación $\overset{x}{\rightarrow} \times \overset{y}{\rightarrow}$ o $\overset{x}{\rightarrow} \times \overset{z}{\rightarrow}$ puede dar un producto $>$, $<$ o $=$ en tanto no se cuantifiquen los datos extensivamente.

Si simbolizamos con $+m$, $=m$ y $-m$ al aumento, la invariancia y la disminución del peso que debe desplazarse en altura y con $+h$, $=h$ y $-h$ al aumento, la invariancia y la disminución de esta altura, el cuadro de doble entrada que caracteriza a la noción de trabajo elaborada por medio de una multiplicación lógica en este nivel II B implica, en efecto, dos indeterminaciones sobre 9 productos (estos productos se expresan con $+$;

—; =; o ± = y significan "más trabajo"; "menos trabajo"; "igual trabajo"; o "indeterminación"):

1)

	—m	=m	+m
—h	—	—	± =
=h	—	=	+
+h	± =	+	+

En resumen, en tanto el sujeto se limite al empleo de las operaciones concretas de clases y relaciones no logra establecer la ley (incluso en la forma de proporciones cualitativas implícitas que intervendrán en el nivel III A). Existe para ello una doble razón: las correspondencias que deben establecerse en la experiencia son demasiado complicadas y los productos de las multiplicaciones de relaciones permanecen en parte indeterminados.

§ 4. SUBESTADIO III A: COORDINACION CUALITATIVA DE LOS TRES FACTORES PERO SIN LA PROPORCION EN FUNCION DE LAS ALTURAS

Con la aparición del pensamiento formal, cuyo carácter propio consiste en considerar el conjunto de los casos posibles para deducir a partir de ellos los reales, se produce una sorprendente inversión de sentido en la posición del problema. En vez de perderse en la construcción del inventario de los casos reales —inventario de hecho inagotable, ya que las correspondencias que deben establecerse mediante sucesivas experiencias son demasiado complicadas— el sujeto, al intentar abarcar todos los casos posibles, se orienta con mucha rapidez hacia una selección de los casos probatorios, es decir, a los casos extremos e intermedios: se le ocurre colocar el riel en posición horizontal y vertical (idea inexplicable sin una anticipación previa de las transformaciones posibles), luego determina las posiciones intermedias demostrativas.

Hay pues de entrada una búsqueda de la coordinación de los tres factores en una sola ley y producción del esquema cualitativo de proporcionalidad. Sin embargo, como el sujeto de este estadio III A piensa en el ángulo medido en grados y no en su seno, es decir en la altura como tal, falla nuevamente, esta vez por poco, en el descubrimiento de la ley buscada.

Lav (10;6 adelantado): "*Para que suba hay que colocar más peso* (en P), *para que baje, menos peso.* ¿Qué otra cosa puede hacerse para que suba? *Bajar el riel.* ¿Y para que baje? *Quitar todos los pesos* (en P). *También se puede colocar*

pesos en el vagón. Y también colocar la vía más alta, porque el vagón desciende entonces con más fuerza. ¿Qué hay que hacer para que el vagón se quede en su lugar? *Depende de cómo se coloque la vía y que se pongan más o menos pesos en el vagón* (coloca la vía en un ángulo de cerca de 45 grados y encuentra que tres unidades en P equilibran el vagón). *¿Hay otros lugares donde el vagón se quede sin moverse? Colocar la vía en posición horizontal y quitar los pesos de aquí* (P)." Luego mide los pesos necesarios para la posición vertical de la vía después de anunciar "*cuatro o cinco* (unidades) *porque el vagón tiene cuatro pesos*" y encuentra el equilibrio para $P = 4$. "Entonces, dime lo que hay que hacer para que el vagón no se mueva. *Hay que colocar la vía totalmente abajo sin pesos o totalmente recta con 4 pesos y también colocar el riel en posición intermedia con dos pesos* (no probó con una altura intermedia, o sea con 33 grados). ¿Hay otros lugares? *Sí, en todas partes* (encuentra una unidad para 15 grados). ¿Comprendiste todo? *Sí, cuanto más arriba se está* (= inclinación del riel) *más pesos hay que colocar para que el vagón se quede donde está, cuanto más se desciende, menos pesos se necesitan.*"

End (11;6): "*Se puede quitar un peso para que baje, colocar uno para que suba o elevar la vía.*" Prueba entonces por su cuenta y empieza a bajar la vía hasta que queda en posición horizontal, luego la alza hasta que queda en posición vertical y afirma: "*Si se quiere colocar la vía derecha* (vertical) *hay que poner más pesos: se necesitan 4 pesos.* ¿Por qué 4? *Porque con 4 no sube. Puede compararse con una balanza, de un lado 400 g y del otro también 400.*" Después: "*Quiero ver cuántos pesos hacen falta con 45 grados* (encuentra 2 ½)", luego concluye: "*Cuanto más se baja, más pesos hay que quitar. Cuanto más se sube, más hay que agregar.*"

Scu (11;10): "*Para que suba se puede bajar la vía o quitar pesos en el vagón o colocar pesos* (en P)." Busca las posiciones de equilibrio, para ello modifica la pendiente: "*Cuando está baja, no hay bastantes pesos en el vagón y el vagón sube: el contrapeso tira más fuerte.*" Pasa al vagón ($M = 4$) luego prueba con 33 grados y comprueba que el equilibrio se obtiene con $P = 2$: "*Qué raro: hace un rato se vio que el vagón pesaba 4 y ahora se tiene 2* ($P = 2$) *y tira al vagón que pesa 4. Hay que levantar más arriba para obtener la igualdad* ($4 = 4$) *y hacer un cálculo de las relaciones con la inclinación.*" Sube cada vez más: "*Todavía no es bastante* (está en 80 grados). *Ya casi funciona. Debe ser recto* (90 grados). *Cuando hay inclinación el equilibrio cambia y cuando está totalmente recto, la relación es de 1 a 1.*" Sin embargo, para la mitad de la inclinación, busca 45 grados, cuando ya había encontrado dos unidades para 33 grados, y no comprende el papel exclusivo de la altura.

Cla (11;6): "*Para que baje, se puede volver a subir la linea, o bien quitar pesos en el contrapeso* (P) *o bien agregar pesos en el vagón* (M)."

A la inversa de los sujetos del nivel concreto superior II B, los de este primer estadio formal III A coordinan de entrada o con mucha rapidez los tres factores en una sola relación. En primer lugar esta relación

es el simple enunciado de los factores en la forma de una disyunción ternaria. Si llamamos p al aumento del peso en P (y $\bar{p}$ a su disminución), q al aumento del peso en M ($\bar{q}$ a su disminución); r al aumento (o $\bar{r}$ a la disminución) de la inclinación, y t al ascenso del vagón (o $\bar{t}$ a su descenso) se ve, en efecto, que Scu y Cla comienzan por las reciprocidades:

2) $t \supset (p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$ y $\bar{t} \supset (\bar{p} \vee q \vee r)$

En la práctica estas disyunciones ternarias quedan señaladas por el hecho de que el sujeto ya no modifica dos de los factores sin pensar en el tercero, sino que busca las covariaciones. A partir de entonces se convence con mucha rapidez de que el equilibrio del vagón y el contrapeso varía en función de la inclinación y entonces ejecuta algunas pruebas y por lo general desemboca casi de inmediato en las posiciones extremas: la posición horizontal en la que el vagón se halla en equilibrio sin contrapesos ($P = o$) y la vertical donde se halla en equilibrio como en una balanza, cuando su contrapeso iguala a su propio peso ($P = M = 4$). De ahí la ley cualitativa: cuanto más se aumenta la inclinación, más contrapesos se necesitan para equilibrar el vagón, hasta la inclinación límite (vertical) en la que este contrapeso iguala al peso del vagón.

Una vez que el sujeto posee las operaciones disyuntivas (2) también posee, desde el punto de vista del manipuleo formal de las negaciones y reciprocidades, al grupo *INRC* en su forma:

3) I $(p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$
N $(\bar{p} \cdot q \cdot r)$
R $(\bar{p} \vee q \vee r)$
C $(p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r})$

y la utilización de esa estructura proporciona de modo natural el esquema de proporcionalidad que se discierne en varios casos, en particular en el de Lav:

$$4) \quad \frac{p \vee \bar{q} \vee \bar{r}}{\bar{p} \cdot q \cdot r} = R \frac{\bar{p} \vee q \vee r}{p \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}}$$

En efecto, en este nivel todos los sujetos comprenden las compensaciones posibles entre p y $\bar{r}$ y entre q y r.

Pero para que ese grupo, esa proporcionalidad y esas equivalencias conduzcan a la ley $h/H = P/M$ haría falta una cuarta variable, que correspondiera a la altura absoluta H (la longitud del riel en posición vertical). Sólo en esa condición las reciprocidades e inversiones proposicionales expresarían las reciprocidades e inversiones del sistema en equilibrio que estamos analizando. Ahora bien, el sujeto calcula la inclinación en grados, lo que para H da una constante (90 grados) cualquiera que sea el dispositivo elegido, y ello lo conduce a probar con la mitad de la incli-

nación, o sea 45 grados, posición en la que el contrapeso no tiene el valor 2 sino un valor intermedio entre 2 y 3: por lo tanto el sujeto o generaliza falsamente o no se halla en condiciones para encontrar una ley simple.

De hecho, a pesar de la aparición de las implicaciones y disyunciones formales con las consecuencias (3 y 4) que implican, el sujeto de este nivel no llega pues a excluir el ángulo (en grados) en provecho de la altura. Esta situación puede resultar sorprendente puesto que ya en el nivel II B el niño tenía acceso a la noción de trabajo en función del ascenso de un peso. Pero era porque el sujeto se limitaba entonces a razonar de manera cualitativa sin disociar las nociones de ángulo y altura. Cuando el sujeto del nivel III A quiere superar esta relación cualitativa de inclinación para encontrar una expresión métrica, piensa entonces por el contrario más en el ángulo que en la altura, sin duda porque el dispositivo que regula la inclinación de la vía describe un movimiento de rotación.

§ 5. SUBESTADIO III B: DESCUBRIMIENTO DE LA LEY

Una vez excluida la medida del ángulo en grados en provecho de la altura (seno), el sujeto descubre la proporcionalidad de las alturas y los pesos. Pero, cosa curiosa, esa exclusión no resulta fácil (la hemos sugerido en el segundo de los tres casos siguientes):

Gil (12;7) se le ruega que encuentre las posiciones de equilibrio y que enuncie la ley. Encuentra P = 4 en la vertical, luego busca la mitad (P = 2) con 45 grados, luego con 60 grados: "¿Por qué? *Cuento la mitad de la distancia* (horizontal). *No, no funciona. Hay que buscar dónde se encuentra la mitad* (realiza la experiencia para P = 2). *Es alrededor de los 30 grados. Pero también hay que considerar éste* (la altura). *Aquí con 2 pesos tenemos 32 grados. Para 3 pesos hay que colocarlo a 3* (de altura). Me parece que es así (experiencia). *Sí, para una carga* (P = 1) *hay que colocar el riel en el número 1, para 2 cargas en el 2, para 3 cargas y para 4 cargas arriba de todo.* ¿Podrías formular una sola regla? *Sí, para 2 cargas hay que estar en la mitad. Para la semialtura se necesita la mitad del peso del pequeño vagón, para un cuarto, un cuarto del peso total, etcétera.*"

Diz (14;3): "*Si el riel es vertical, habrá que poner bastantes unidades aquí* (P) *para que sea igual* (a M: encuentra 4). *De cada lado corresponden los dos pesos. Para la mitad tiene que haber dos veces menos peso.* ¿La mitad de qué? *De la inclinación: 45 grados* (experiencia: 2 ½). *¡No! ¡Se trata del roce!* Es posible, pero desempeña una pequeña función. (Encuentra que P = 2 corresponde a 33 grados) 33 *grados corresponde a más o menos* ⅔. Mire aquí (las alturas). *¡Ah! ¡La altura! Lo que importa no es el ángulo sino la altura* (prueba con las alturas ½, ¾ y ¼). *Es necesario que el peso que arrastra al vagón* (P) *sea igual*

a la altura: si por ejemplo se tiene una altura de 2, hace falta 2 contra 4, si se tiene 1 entonces 1 contra 4 (1 y 2 de altura corresponden a ¼ y ½)."

Vul (15;6) determina 4P para M cuando el riel es vertical, luego: "*Con 33 grados encuentro 2; con 15 grados encuentro 1; con 60 grados debería haber 4 pero no es así. Si no es proporcional a los grados, entonces...* ¿Hay otra cosa? *La altura corresponde a los grados. Si tomo el doble de esto: la altura 2 corresponde a 2 pesos. Bien, ya encontraremos: la altura 3 da 3 pesos. Bien, es proporcional a la altura. Cada vez que se aumenta la altura en esta proporción, hay que colocar un peso más.*" En resumen: "*La relación de la altura es igual a la relación del peso.*"

Se tienen así dos casos complementarios de respuestas. En uno (Diz) el descubrimiento de la altura es el resultado de una sugerencia y el adolescente deduce enseguida la ley de proporcionalidad. En el otro, en cambio se descubre la altura en cuanto factor como resultado de la búsqueda de una proporcionalidad: de esta proporcionalidad simple que todavía se les escapaba a los sujetos del nivel III A.

En ambos casos se encuentra la ley: $hH = P/M$. Si llamamos s al enunciado del aumento de la altura total (longitud del riel en posición vertical, que en realidad no varía en nuestra experiencia) la proporción lógica es la siguiente:

$$5)\ \frac{r}{s} = R\frac{P}{q}$$

donde $q \cdot r$ representan entonces un aumento del trabajo que debe realizarse y $p \cdot s$ el aumento del trabajo proporcionado por el contrapeso en función de la altura total.

En efecto, en virtud de las equivalencias ya planteadas entre p y $\bar{r}$ o entre q y r así como en virtud de la equivalencia entre $\bar{q}$ y s (equivale a lo mismo aumentar el peso del vagón o disminuir el valor de H), la proporción (5) se deduce a partir de:

$$6)\ \frac{\bar{r}}{\bar{q}} = R\frac{P}{q}$$

Las formas que adquieren el esquema del equilibrio (grupo *INRC*) y el de la proporcionalidad, en este caso, son entonces las mismas, *mutatis mutandis*, que en el caso de la balanza (cap. XI). Ese isomorfismo presenta un problema interesante desde el punto de vista de la psicología del pensamiento formal. La estructura de las dos leyes es en verdad la misma. Si de los dos pesos en equilibrio sobre la balanza llamamos B al más pesado y A al más liviano, B corresponde aquí al peso del vagón (M) y A al del contrapeso (P); si llamamos L a la distancia horizontal (a par-

tir del eje) que corresponde al peso A (por lo tanto a la mayor de las dos distancias para el más pequeño de los dos pesos) y l a la que corresponde al peso B (la distancia más pequeña para el peso más grande), entonces L corresponde en este caso a H y l a h. Se tiene entonces:

$$I/L = A/B \text{ como } h/H = P/M$$

Sin embargo el contenido intuitivo de estas dos leyes es muy diferente (hasta un punto tal que muchos estudiantes de psicología tardan bastante tiempo en comprender su identidad). En el caso de la balanza, el problema se refiere a relaciones entre los pesos y las longitudes l y L medidas horizontalmente sobre los dos brazos, en tanto que las alturas que entran en juego permanecen en estado virtual si el sistema se halla en equilibrio y si no se emplea un dispositivo de suspensión alternativo (como en § 4 del capítulo XI): por lo tanto la noción del trabajo no se impone de inmediato. En el caso del pequeño vagón, por el contrario, las distancias horizontales no desempeñan papel alguno, se percibe la inclinación de modo intuitivo y así el trabajo se impone de modo inmediato al examen de las acciones en juego. La cuestión psicológica consiste entonces en saber si en la evolución de las operaciones lo que predomina es el contenido intuitivo diferente o si, por el contrario, la determinante será la estructura operatoria subyacente. Recordemos en este sentido la correspondencia de los estadios.

Durante el estadio I, en ambos casos se explican los procesos en juego por una asimilación con la propia acción: tirar y empujar, etcétera. Pero como la balanza es simétrica en el nivel de la percepción, tiene aquí lugar con mayor rapidez una igualación de las distancias y de los pesos, a título de regulaciones intuitivas y sin operaciones.

En el nivel II A, hay una igualación operatoria de los pesos en ambos casos, y una comprobación de que la distancia desempeña un papel en el caso de la balanza y la inclinación en el del pequeño vagón, pero sin que el sujeto pueda componer estos factores heterogéneos con los pesos (salvo en ciertas situaciones privilegiadas).

En el nivel II B hay un descubrimiento de la correspondencia inversa entre los pesos y las distancias, en el caso de la balanza en equilibrio (más liviano corresponde a más lejano y más pesado a más cercano); y un descubrimiento del hecho de que, cuanto mayor es la inclinación, se necesita un contrapeso más pesado para equilibrar al vagón. En este último caso, la coordinación entre el peso y la inclinación da lugar a la construcción de la noción de trabajo: subir un mismo peso a más altura exige más trabajo que subirlo a una altura menor. Pero en ambos casos la coordinación sigue siendo cualitativa, con comprensión de ciertas compensaciones (más pesado = menos lejos y más pesado = menos alto) pero sin la posibilidad de resolver el problema en su generalidad por causa de las indeterminaciones de la multiplicación lógica.

En el nivel III A hay un descubrimiento de la proporción métrica en el caso de la balanza y una búsqueda de esa misma proporción en el caso del pequeño vagón, con una ley cualitativa que coordine los tres factores (peso, contrapeso e inclinación). Esta no coincidencia resulta del hecho de que en el segundo caso se trata de disociar la altura del factor ángulo (medido en grados), cuando en realidad la mitad de la altura no equivale a 45 grados sino a 33 grados.

Por último, en el nivel III B se encuentra la proporción métrica en el caso del pequeño vagón, y se la explica directamente en términos de trabajo. Por el contrario, en el caso de la balanza la ley métrica que se encuentra en el nivel III A aparece como un sistema de compensación que se basta a sí mismo y mientras se coloquen al mismo tiempo los dos pesos, el sujeto no piensa en invocar la altura o el trabajo. Pero, cuando se le presentan los pesos de modo alternativo con un dispositivo de suspensión que pone de manifiesto las diferencias alternativas de altura, el sujeto encuentra la proporción inversa entre los pesos y las alturas obtenidas e igualmente explica el equilibrio por la igualdad de los trabajos.

Entre las dos evoluciones hay en efecto un conjunto de diferencias intuitivas que se explican por la configuración del dispositivo y las preguntas que se formulan. Pero justamente por ello resulta aun más sorprendente volver a encontrar el mismo mecanismo operatorio bajo divergencias aparentes. En ambos casos, después de las mismas representaciones preoperatorias del nivel I y las mismas operaciones como punto de partida en el nivel II A, se encuentra la correspondencia inversa en el subestadio II B. En ambos casos, el esquema operatorio de equilibrio sólo se constituye gracias al grupo *INRC* en el nivel de las operaciones proposicionales o formales y en ambos casos este esquema conduce al de las proporciones y compensaciones en su forma general. Las diferencias intuitivas sólo dan entonces lugar a pequeños desnivelamientos en el interior respectivamente de los estadios II y III, mientras que la marcha general de la construcción es la misma.

CAPITULO XIII

LA PROYECCION DE SOMBRAS [1]

El análisis actual presenta además del problema habitual de las operaciones formales necesarias para constituir el cuadro de las posibilidades que permitan el descubrimiento y la verificación de la ley, un problema acerca del esquema operatorio formal relativo a la proporcionalidad. Pero se trata de una proporcionalidad de un nuevo tipo: mientras que las proporciones en juego en el ejemplo de la balanza y en la tracción sobre un plano inclinado correspondían a un modelo de equilibrio físico, las proporciones que aquí se estudiarán a propósito de la proyección de sombras tienen un carácter esencialmente geométrico y traducen las relaciones entre las distancias y los diámetros en un fenómeno físico explicable por la simple geometría proyectiva.

El problema que nos planteamos es saber si las proporciones en juego en las experiencias presentes también se descubrirán en el estadio III, y si lo serán o no en función del grupo *INRC*, concebido entonces en un sentido más general que en los problemas precedentes.

La ley que el sujeto debe encontrar en la experiencia que se le presenta es muy simple. Entre una fuente luminosa y una pantalla de proyección se interponen círculos de diámetros variados y el tamaño de las sombras que se obtienen resulta directamente proporcional al diámetro de estos círculos e inversamente proporcional a la distancia comprendida entre la fuente luminosa y los círculos. En particular se solicita que se formen dos sombras que se superpongan exactamente por medio de círculos desiguales: basta entonces colocar al mayor más lejos de la vela en proporción con su tamaño, y existe una compensación entre las distancias y los diámetros.

No vale la pena en este caso remitirnos a las reacciones del estadio I: los sujetos de este nivel preoperatorio no comprenden nada acerca de la formación de las sombras; por otra parte, anteriormente ya hemos descripto bastante las representaciones de la sombra características de las edades entre 2 y 7 años como para volver aquí sobre este tema.[2]

[1] Con la colaboración de Vinh, B. Reymond-Rivier y F. Marchand.

[2] Véase Piaget, *La causalité physique chez l'enfant*, cap. VIII, §§ 1 y 2, y *La formation du symbole chez l'enfant*, cap. IX.

§ 1. ESTADIO II: DESCUBRIMIENTO DEL PAPEL DE LOS TAMAÑOS (II A) LUEGO DE LAS DISTANCIAS (II B)

El niño del nivel II A sabe que el tamaño de las sombras depende del tamaño de los objetos considerados, pero no sabe nada más:

Pel (7;10) prevé con corrección que un círculo de 10 (cm de diámetro) dará una sombra mayor que un círculo de 5; etcétera. "Si lo desplazo de este lado, ¿dónde estará la sombra? *Allí* (justo) ¿Guarda el mismo tamaño, se vuelve mayor o más pequeña? *Se queda igual.*"

Bar (8;8) comienza con las mismas reacciones. Luego descubre en la experiencia que la sombra de un mismo círculo varía de tamaño en función de la distancia. Se le pide entonces que forme una misma sombra con 4 círculos desiguales: coloca el de 20 a 70 cm de distancia, el de 10 a 41 cm, el de 5 a 23 cm y el de 10 a 11 cm.

Existe pues la posibilidad de una seriación de los tamaños de los círculos y de los tamaños de las sombras y una correspondencia exacta con distancias iguales. Por otra parte, existe una seriación exacta de las distancias pero ninguna relación con el tamaño de las sombras: el sujeto parte de la suposición que la distancia no modifica este tamaño (Pel), luego, cuando la experiencia lo desengaña piensa en transformaciones arbitrarias sin encontrar correspondencias regulares (Bar).

En cambio en el nivel II B, el sujeto deja de pensar que la luz se encuentra "en todas partes" sin rayos de dirección definida y comienza a prever el efecto de los rayos divergentes: por lo menos establece de hecho una correspondencia entre los tamaños decrecientes de la sombra de un mismo objeto y las distancias progresivas a partir de la fuente luminosa; comprende que cuanto más cerca de la pantalla de proyección esté el objeto, más pequeña será la sombra.

Mand (9;6): "*A medida que esto se adelanta* (hacia la vela) *esto* (la sombra) *se vuelve cada vez más grande, porque cuando está más cerca* (de la pantalla de proyección) *se vuelve más pequeño y cuando está más lejos* (de la pantalla) *se vuelve más grande.*"

Nov (10;5): "*Hay que colocar el círculo más pequeño adelante* (o sea del lado de la vela), *porque siempre se va ensanchando* (véase el cono de los rayos luminosos)." Para obtener sombras iguales, coloca entonces el círculo de 5 a 44 cm, el de 10 a 55 cm; el de 15 a 56 cm y el de 20 a 57 cm (!).

Oli (10;2) coloca el círculo de 5 a 10 cm y el de 10 a 19 cm, luego 15 a 38 cm y 20 a 50 cm. "¿Por qué los colocas así? *Porque éstos* (5 y 10 de diámetro) *son más grandes* (porque están más cerca de la vela) *y éstos* (15 y 20 de diámetro) *se vuelven más pequeños.*"

Chri (10 años) coloca 5 a 2 cm, 10 a 15, 15 a 29 y 20 a 42 cm "*porque los más pequeños deben estar más hacia atrás para formar el mismo tamaño que los grandes: hay que colocarlos más o menos a distancias iguales*".

Del (11;11) coloca 5 a 11 cm, 10 a 21 cm, 15 a 32 y 20 a 43 cm. Luego 5 a 41 cm, 10 a 52, 15 a 63 y 20 a 74 cm.

Mau (11;10) coloca 5 a 55 cm, 10 a 63, 15 a 71 y 20 a 80 cm.

Existe pues una correspondencia cualitativa nítida entre los tamaños de las sombras y las distancias, pero con dos particularidades muy instructivas en lo referente a la oposición entre las compensaciones por multiplicaciones lógicas del nivel concreto y las proporciones en sentido estricto: las del nivel formal con compensaciones multiplicativas.

La primera de estas particularidades reside en que los sujetos de este estadio II B, al mismo tiempo que saben construir correspondencias inversas, prefieren de modo espontáneo las directas y, en consecuencia, tienen tendencia a calcular las distancias a partir de la pantalla de proyección (de la pantalla de papel sobre el que se proyectan las sombras) y no a partir de la fuente luminosa (véase "esto se adelanta" en el caso de Mand, "más atrás" en el de Chri, estas expresiones se refieren siempre a la pantalla). Sin embargo, en ciertos sujetos se presenta una intuición del cono luminoso (véase Nov "siempre se va ensanchando"), pero cuando miden las distancias lo hacen a partir de la pantalla de proyección, de tal modo que existe entonces una correspondencia directa: cuanto mayor es la distancia (a partir de la pantalla), más grande se hace la sombra (los círculos de 5 a 10 son "más gruesos" afirma Oli, que los de 15 y 20 cm de diámetro).

No obstante, se comprende bien que la distancia y el tamaño del círculo se compensan mutuamente. Sin embargo (y aquí reside la segunda particularidad de estas reacciones y la más importante) los intentos de cuantificación métrica que provoca esta compensación no constituyen todavía para nada un testimonio de una proporcionalidad en sentido estricto, es decir, de relaciones multiplicativas, sino de diferencias aditivas constantes pero cualesquiera en las seriaciones y en las correspondencias. Por ejemplo Nov, después de una distancia de 11 cm entre los dos primeros círculos, coloca los siguientes a 1 cm de distancia (54, 55, 56, 57 cm) (!). Asimismo Mau coloca círculos cuyos diámetros varían de 8 a 9 cm en distancias que varían de 55 a 80 cm y Chri calcula diferencias constantes de 13 a 14 cm. Oli parece acercarse a la proporcionalidad, pero simplemente establece una dicotomía entre los pequeños y los grandes: establece entonces una diferencia aditiva de 9 y de 12 cm en el interior de cada conjunto, pero con una relación de lo simple a lo doble entre los dos conjuntos (!). En cuanto a Del, que tiene la edad que corresponde al nivel III, comienza con una proporción casi exacta, luego, durante un nuevo ensayo, vuelve a caer en una diferencia aditiva arbitraria de 11 cm partiendo de 41 cm (!).

§ 2. ESTADIO III: PROPORCIONALIDAD DE LA CORRESPONDENCIA (III A); LUEGO GENERALIZACION Y EXPLICACION DE LA LEY (III B)

Las novedades del subestadio III A son la proporcionalidad métrica inversa entre las distancias y los diámetros de los círculos, pero sin que se produzca aún generalización posible a todos los casos. El sujeto mide entonces los diámetros y las distancias y busca una hipótesis métrica apoyándose en la estructura de los rayos de luz divergentes, y tomando en cuenta la distancia entre la fuente luminosa y el primer círculo que coloca (el más pequeño o el más grande):

Che (12;8) mide los círculos y encuentra una diferencia de 5 cm entre sus diámetros: concluye que es necesario "*encontrar una separación que sea un múltiplo de 5*", los reúne con corrección en proporción a sus tamaños.

Duc (12;1) después de colocar al círculo de 20 a 83 cm, dice: "*Ahora hay que contar desde aquí hasta allá* (a la vela) *y dividir por 4.*" Coloca entonces el círculo de 5 a 21 cm, el de 15 a 61 cm, pero el de 10 a 51 cm. "¿Y si sólo te doy tres círculos (15, 10 y 15)? *Hay que contar a partir del mayor y dividir por tres.*"

Wal (12;4) divide la sombra del gran círculo por la distancia, de donde $50/40 = 1{,}25$ y busca diferencias que sean múltiplos de 1,25 (!). Luego, coloca el círculo de 5 a 25 cm, el de 10 a 50: "*¡Es la mitad!*" Coloca entonces el de 15 a 75 cm y el de 20 a 100 cm: "*Funciona, siempre se trata de 5 cm más* (en los círculos) *y las longitudes siempre tienen 25 cm más: se trata de la misma escala.* ¿Quieres encontrarme otra distancia para que la sombra sea la misma para todos los círculos? (Los coloca a 26 cm de distancia y retrocede la vela en 4 cm.) ¿Y sin mover la vela? *Me parece que no se puede: no se puede agrandar la escala.* (Se coloca el círculo de 15 a 46 cm: coloca entonces el de 10 a 23 cm; luego el de 5 a 7, el de 10 a 30, el de 15 a 53 y el de 20 a 76 cm (!)."

El sujeto de este nivel comienza pues de modo evidente con una hipótesis acerca de la proporcionalidad. Pero la proporción sólo se encuentra en uno o en dos casos, y no puede generalizarse aún para todos los casos. Hay en efecto una coordinación de todas las relaciones concretas anteriores de seriación y correspondencia bajo el efecto de una construcción de conjunto: todas las relaciones se hallan subordinadas a la representación geométrica de los rayos divergentes (el sujeto durante la experiencia y con el fin de controlar su construcción, opera apuntando con la vista) y esta figura se halla correctamente provista de las propiedades de la proporcionalidad.

En efecto, a partir de entonces, el sujeto calcula sus distancias a partir de la vela y ya no a partir de la pantalla de proyección y en su

construcción toma en cuenta la distancia existente entre la vela y el primer círculo y ya no sólo —como era antes— las distancias entre los círculos (éstas son dos novedades en relación con el estadio II).

Sin embargo se contenta con hacer una verificación de su hipótesis con un caso y no concibe aún tal construcción como el móvil susceptible de adquirir diversas formas equivalentes. En otros términos no busca aún la ley general como un sistema de relaciones necesarias y suficientes para explicar el resultado obtenido.

La generalización y la explicación de la ley son las que caracterizan al nivel III B:

Wah (14;1): *"Se toma cualquier distancia con tal de que se tenga la misma relación."*

Mic (14;6): *"Puesto que los diámetros tienen todos diferencias regulares, es necesario que las diferencias entre las distancias sean las mismas."* Coloca entonces los círculos de 5, 10, 15 y 20 cm a distancias de 8, 16, 24 y 32 cm, luego toma otra distancia arbitraria y encuentra igualmente la proporción: *"Estas distancias deben tener la misma relación que tienen estos círculos entre sí."*

Fau (15;6): *"Para que la sombra sea igual, la misma con dos círculos distintos, es necesario que la fracción de los ejes* (o sea las distancias) *sea igual a la fracción de los dos círculos."* Luego: *"La sombra nunca será más pequeña que el círculo mismo."*

Hue (15;6): *"El ángulo formado con* (por) *los rayos de luz se separa cada vez más. Para que la luz llegue a formar un tamaño doble* (de la sombra), *se necesita una doble distancia"*, etcétera.

Mart (16;2) comienza por el examen de los círculos mediante el procedimiento de apuntar con la vista: *"Hay que colocar el mayor lo más lejos posible y es necesario que exista una* (misma) *relación entre los diámetros de los círculos y las distancias."* Logra obtener la proporción.

Guy (16;6): *"Debería dar un rayo que vaya así* (muestra una forma de cono) *a partir del círculo pequeño. Pienso que el primer círculo dará una sombra que se perfilará en función de una especie de rayo que aumenta de amplitud..."*

Se ve la diferencia de actitud entre estos sujetos y los del nivel III A: la construcción se halla de entrada subordinada a una hipótesis a la vez explicativa y general, y esta vez ya no sólo se trata de los rayos de luz divergentes, sino del cono en sentido estricto. Este esquema explicativo implica la proporcionalidad y se aplica, como dice Wah, a "cualquier distancia".

Pero recordemos que la proporcionalidad se anticipó antes de esta construcción final: las proporciones se deducen a partir de la figura de conjunto una vez encontrada la explicación; sin embargo en el nivel III A había proporcionalidad sin que antes apareciera esa figura (lo que sucede por otra parte todavía muy a menudo en el subestadio III B). ¿Cuál es

entonces la naturaleza de esa proporcionalidad que no se deriva a partir de un esquema mecánico como las de los capítulos anteriores, sino acompañada de entrada por las representaciones geométricas (los rayos divergentes de luz, luego la figura del cono)? En cierto sentido, los sujetos del estadio III logran la proporcionalidad por el hecho mismo de que acceden a la lógica de las proposiciones y así se vuelven capaces de comprender y transformar la igualdad de los dos productos: de hecho lo logran cuando el enunciado de un cierto aumento del diámetro de los círculos (designaremos con p a este aumento y con $\bar{p}$ a la disminución correspondiente) junto con un cierto aumento de la distancia (que llamaremos q, y $\bar{q}$ a la disminución correspondiente) se relaciona con el mismo resultado que otros dos aumentos o disminuciones conjuntos. Pero por otra parte resulta claro que esta igualdad de los productos sólo se comprende como un instrumento que permite expresar una compensación multiplicativa entre las transformaciones de los diámetros y las de las distancias.

Si designamos con r_0 a la conservación de la magnitud de la sombra y con $\bar{r}_0$ a su modificación, con r a su aumento y con $\bar{r}$ su disminución (por lo tanto $\bar{r}_0 = r \vee \bar{r}$), el sujeto comprueba en efecto lo siguiente: en primer lugar, en caso de modificación de los diámetros y las distancias, la conservación r_0 implica un aumento simultáneo de ambos, o una disminución de los dos:

1) $r_0 \supset [(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})]$

Luego las combinaciones $p \cdot \bar{q}$ y $\bar{p} \cdot q$ siempre corresponden a modificaciones de la sombra:

2) $[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)] \supset \bar{r}_0$

Pero en dos sentidos opuestos:

3) $(p \cdot \bar{q}) \supset r$ y 3 bis) $(\bar{p} \cdot q) \supset \bar{r}$

Por último, pueden obtenerse los mismos resultados cuando se aumenta el diámetro, o bien cuando se disminuye la distancia y recíprocamente:

4) $r \supset (p \vee \bar{q})$, esto es $r \supset [(p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})]$ con exclusión de $\bar{p} \cdot q$

y

5) $\bar{r} \supset (\bar{p} \vee q)$, vale decir $\bar{r} \supset [(\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q)]$ con exclusión de $p \cdot \bar{q}$

En efecto, si bien r_0 implica $(p \cdot q)$ o $(\bar{p} \cdot \bar{q})$, en caso de modificación de los diámetros y las distancias, la recíproca no es verdadera y $(p \cdot q)$ o $(\bar{p} \cdot \bar{q})$ pueden implicar r o $\bar{r}$.

A partir de estas implicaciones que muestran que los mismos productos pueden ser el resultado de dos causas diferentes, el sujeto logra entonces descubrir el esquema cualitativo de la proporcionalidad. A partir de (1), deduce:

6) $(p \cdot q) = R\ (\bar{p} \cdot \bar{q})$

Y de ahí, por reciprocidad de los productos cruzados:

7) $\frac{P}{\bar{P}} = R \frac{\bar{q}}{q}$

Y a partir de (2) deduce:

8) $(p \cdot \bar{q}) = R\ (\bar{p} \cdot q)$

De ahí, por reciprocidad de los productos cruzados:

9) $\frac{P}{q} = R \frac{\bar{P}}{\bar{q}}$

Ahora bien, recordemos que esta proporción (9) es la que corresponde a la proporción numérica $\frac{nx}{ny} = \frac{x:n}{y:n}$.

De una manera general, el descubrimiento de la proporcionalidad es el resultado, en este caso particular, de la comprensión de las compensaciones multiplicativas. Recordemos que el niño del nivel II B ya percibe que una modificación del diámetro de los círculos puede compensarse con una modificación de las distancias, sin embargo sólo consigue interpretar esa compensación como una forma aditiva (igualdad de las diferencias). En efecto, para atribuirle a la compensación su verdadera forma —multiplicativa— resulta indispensable distinguir y coordinar a la vez dos clases de transformaciones generales: la inversión que anula la modificación considerada y la reciprocidad que la compensa sin anularla. Ahora bien, los sujetos del estadio III las consiguen precisamente mediante las operaciones proposicionales: cuando distinguen dos variables independientes de tal modo que las modificaciones de cada una de ellas pueden anularse (inversión), pero de tal manera que las modificaciones de una pueden compensar las de la otra sin anularlas (reciprocidad), llegan a utilizar efectivamente (por supuesto sin conciencia alguna) un grupo de 4 transformaciones, cuya consecuencia más directa es el descubrimiento de la proporcionalidad.

En efecto, resulta sorprendente comprobar que la expresión $(p \cdot \bar{q})$ en la prop. (3) (aumento del diámetro y disminución de la distancia) es la correlativa de la expresión $(p \vee \bar{q})$ en la prop. (4), del mismo modo

que la expresión $(\bar{p} \cdot q)$ en la prop. (3 bis) es la correlativa de la expresión $(p \vee q)$ en la prop. (5), cada uno de esos pares de proposiciones (3 y 4 ó 3 bis y 5) se halla vinculado con un resultado inverso al del otro par $(r$ o $\bar{r})$.

Tenemos entonces el siguiente grupo:

10) I $(p \vee \bar{q})$
N $(\bar{p} \cdot q)$
R $(\bar{p} \vee q)$
C $(p \cdot \bar{q})$

De ahí la proporción posible:

11) $\dfrac{p \vee \bar{q}}{p \cdot \bar{q}} = \dfrac{\bar{p} \vee q}{\bar{p} \cdot q}$ o sea $\dfrac{Ix}{Cx} = \dfrac{Rx}{Nx}$ donde x en este caso es $(p \vee \bar{q})$

Pero es poco probable que estas prop. (10 y 11) intervengan efectivamente en el razonamiento de los sujetos, por más que se las deduzca sin más de las prop. (3, 3 bis, 4 y 5) que constituyen la expresión directa de los enunciados del estadio III. Se tiene entonces aquí el ejemplo de una estructura que, sin duda alguna, sigue siendo simplemente virtual pero que se halla implicada en los razonamientos reales observados. En cambio, puede admitirse que el grupo *INRC* interviene en el pensamiento de los sujetos en forma más simple y siempre "uninaria", que explica entonces las proporciones (7 y 9): si el aumento del diámetro se plantea como una transformación idéntica $(I = p)$, entonces su disminución resulta ser la transformación inversa $(N = \bar{p})$, pero el aumento de la distancia en relación con el foco luminoso compensa el aumento del diámetro sin anularlo y por lo tanto desempeña el papel de la transformación recíproca $(R = q)$; por último, la negación de la recíproca produce los mismos efectos que el aumento del diámetro y desempeña entonces el papel de la correlativa $(C = \bar{q})$. De ahí las siguientes proporciones:

$$\frac{p}{q} = \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \text{ o } \frac{p}{q} = R\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \text{ (prop. 9)}$$

El grupo *INRC* cumple pues con una función más general que la explicación del equilibrio mecánico. También interviene —lo veremos en la tercera parte de esta obra— cuando se trata de coordinar dos sistemas distintos de referencia (movimientos relativos: véase cap. XVII, § 5, en III). Incluso interviene —lo vemos aquí— cuando se trata de coordinar las transformaciones de dos variables independientes, pero con una compensación multiplicativa posible de los efectos de estas transforma-

ciones (en oposición con las compensaciones aditivas conocidas a partir del nivel de las operaciones concretas).

OBSERVACIÓN: Debe señalarse que la proporcionalidad lógica no sólo se relaciona con el grupo *INRC*, sino que se la puede derivar a partir de la estructura general de proporcionalidad característica de la estructura de reticulado (en un sentido que por otra parte nos parece implicar también al grupo *INRC*: véase Piaget, *Essai sur les transformations des opérations logiques*, págs. 166-168). Un reticulado es un sistema semiordenado de inclusiones (y, en la lógica de las proposiciones, de implicaciones), de tal modo que dos elementos cualesquiera del sistema, x y y, tienen siempre un límite superior LS (= el mayorante menor, esto es, el elemento más pequeño que los incluye a ambos) y un límite inferior LI (= el mayor minorante, esto es, su parte común). Ahora bien, en todo reticulado existe una relación $\frac{LI}{x} = \frac{y}{LS}$ que constituye una proporcionalidad. Por ejemplo, en lógica $\frac{p \cdot q}{p} = \frac{q}{p \vee q}$. Si, desde el reticulado de la lógica de las proposiciones, se pasa a la de los números enteros, se conoce que el LI = el máximo común divisor (MCD) y la LS = el mínimo común múltiplo (MCM). Se tiene entonces:

$$\frac{MCD}{x} = \frac{y}{MCM}, \text{ por ejemplo } \frac{2}{4} = \frac{6}{12} \text{ o } \frac{1}{20} = \frac{3}{60}$$

Ahora bien, en el caso de las sombras, el sujeto podría llegar a obtener directamente la proporción lógica:

12) $\frac{p \cdot q}{p} = \frac{q}{p \vee q}$ donde $p = (p \cdot q \vee p \cdot \bar{q})$ y $q = (p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q)$

(p, q y sus negaciones tienen el mismo sentido que en las prop. 1 a 11).

Sin embargo, por una parte, no hay testimonio alguno de que los sujetos del estadio III recurran a la estructura de reticulado para la solución del problema de las sombras ya que esta estructura se manifiesta en el nivel psicológico en los razonamientos cualitativos por una intervención explícita de las operaciones combinatorias, lo cual no sucede aquí. Por otra parte, desde el punto de vista formal, la proporción (12) puede reducirse a las proporciones derivadas a partir del grupo *INRC*, mientras que la recíproca no es verdadera.[3]

[3] Véase Piaget, *Les transformations des opérations logiques*, pág. 225.

CAPITULO XIV

FUERZA CENTRIFUGA Y COMPENSACIONES [1]

Después de examinar el esquema de la proporcionalidad en sus diferentes formas, en relación con el esquema del equilibrio (capítulos XI y XII) o con independencia de él (capítulo XIII) nos queda aún por examinar un último caso a partir del cual se analicen las relaciones entre el esquema de las proporciones y el de la compensación multiplicativa. No hablamos aquí de la compensación en el sentido más general del término, convirtiéndose entonces en sinónimo de reversibilidad, sino en la compensación entre factores heterogéneos x y y tales que el aumento de valor de uno de ellos proporciona el mismo resultado que el aumento o la disminución de valor del otro. Ya hemos encontrado compensaciones de este tipo en el caso de la flexibilidad (capítulo III, § 6), luego en el caso de las distancias y los pesos de la balanza, en el caso de las inclinaciones y los pesos en la tracción sobre un plano inclinado y en el caso de los diámetros y las distancias en el problema de las sombras. No obstante nos pareció interesante analizar un nuevo ejemplo. En él el sujeto tiene al mismo tiempo la posibilidad de construir proporciones métricas (lo cual no sucede en el caso de la flexibilidad) y aislar los factores del equilibrio en juego mediante el procedimiento "permaneciendo igual todo lo demás" (lo que no sucede en el caso de la tracción del pequeño vagón). Nuestro objetivo consiste en investigar si, desde el punto de vista psicológico, son las proporciones las que desencadenan la idea de compensación o si es la inversa.

Sobre un disco en rotación, se colocan tres bolas de pesos diferentes y a tres distancias diferentes del centro: el disco se pone en movimiento mediante el efecto de la fuerza centrífuga. La cuestión consiste en prever en qué orden las bolas abandonarán sus posiciones y por qué lo harán. Es cierto que la fuerza centrífuga obedece a una ley complicada $f = mv^2/r$ donde $m =$ la masa, $r =$ el radio (distancia a partir del centro) y $v^2 = r^2w^2$ (donde $w =$ la velocidad angular). Al reemplazar v^2 por r^2w^2 se obtiene $f = mw^2r$. Pero, como la velocidad del disco siempre es la misma (igual

[1] Con la colaboración de M. Meyer-Gantenbein y L. Vergopoulo.

aceleración en la partida salvo pequeñas diferencias) el sujeto sólo debe aislar los factores *m* y *r*, vale decir, comprender las dos relaciones siguientes: cuanto más pesada es una bola más rápido sale y cuanto más cerca se encuentre del centro más tarde sale. Se plantea entonces el siguiente problema de compensación: una bola pesada colocada cerca del centro puede salir al mismo tiempo que una liviana colocada más cerca de la periferia (se calculan los tres pesos de tal modo que las tres distancias puedan compensarlos).

§ 1. ESTADIO I: INTERPRETACIONES PREOPERATORIAS

Los sujetos menores de 7 años recurren a todas las razones para explicar el orden de sucesión de las partidas, incluidos el grosor y la distancia, pero no de modo exclusivo:

Coq (6;11): *"Una se va de un lado, la otra del otro porque no quieren ir del mismo lado."*

Pav (6;2): *"La bola que está sobre el tercer círculo saldrá en primer lugar porque está más cerca del borde.* (Grande y mediana sobre el mismo círculo.) *Juntas. No importa que sean más grandes.* (Experiencia.) *La grande salió primero porque es pesada. Las pesadas siempre son las primeras."*

Cum (6 años): *"Salieron porque gira. Quiero poner las pequeñas porque las grandes corren.* (Experiencia.) *La grande sale más rápido."*

Así pues, a partir de este nivel el sujeto puede tomar en cuenta los dos factores presentes, con la docilidad del fenomenismo unida a la ausencia de toda prudencia operatoria (véase Pav que pasa del "nunca" al "siempre" confrontado con un solo caso) (!). Con más precisión, el niño de este estadio observa los hechos pero no se halla a su disposición un esquematismo suficiente acerca de la inclusión o del "todos" y el "algunos" para establecer leyes. Se le suma a ello la tendencia a creer que todo lo que es debe ser como es, que constituye a la vez el principio de la generalización y una cierta indiferenciación entre lo moral y lo físico.

§ 2. SUBESTADIO II A: CORRESPONDENCIAS PARCIALES

Desde el comienzo de las operaciones concretas existe una seriación correcta de los grosores (o pesos) de las bolas y una correspondencia con su orden de salida, pero únicamente cuando las distancias son iguales (con independencia de la voluntad del sujeto). Asimismo existe una correspondencia exacta entre las salidas y las distancias cuando los pesos son iguales. Pero la multiplicación de las dos relaciones sólo se presenta de

modo excepcional y en el caso en que los dos factores actúan en el mismo sentido y aún no en los casos de compensaciones.

Gui (7;4): "*Salieron todas... Las grandes salieron y empujaron a las pequeñas* (previsión): *No van a salir porque puse una grande* (gira). *Sin embargo igual salieron.* (Nueva prueba.) *Esta se quedó porque es demasiado liviana.* ¿Por qué? *Las bolas livianas se quedan; a veces salen porque el aparato va rápido.* (Se colocan bolas grandes de pesos iguales a las distancias D 3 y D 2.)[2] (D 3) *era la primera* (D 2) *la segunda.* ¿Por qué? *Porque siempre es la primera cuando está en* (1). ¿Por qué? *Tiene que recorrer un camino corto.* (Se coloca P 2 en D 3 y P 1 en D 2.) (P 2) *será la primera* (gira). *Las dos al mismo tiempo; la pequeña* (P 2) *un poco antes.* ¿Te asombra? *No. Las grandes van más rápido* (vuelve a hacerse la experiencia). *La pequeña* (P 2) *era la primera y la grande* (P 1) *venía luego, pero llegaron al mismo tiempo. Primero era la grande y empujó a la pequeña* (en realidad las salidas fueron casi simultáneas y en direcciones opuestas). *La grande era la primera porque es más pesada* (vuelve a probarse: casi al mismo tiempo). *La pequeña es la primera porque tiene que recorrer un camino corto.*"

Mon (8 años) Previsión: "*Cuando giro salen hacia cualquier lado; sucede lo mismo para todas.* (Experiencia.) *Las que están más cerca salen primero... las que están allí* (cerca del borde: D 3) *salen primero.*" Se colocan dos pesos diferentes: "*Las medianas saldrán en primer lugar porque son más livianas.* (Experiencia.) *No, es al contrario.* ¿Puedes volver a empezar? *¡Si una vez es así, siempre será así!* (Se coloca P 1 en D 3 y P 2 en D 1.) *No, qué tonto soy:* (P 3) *salió antes porque* (P 2) *está más cerca del eje.*"

Mor (8 años) después de hacer comprobaciones del mismo tipo llega a la siguiente multiplicación lógica: "¿Cómo vas a colocar las bolas (P 1, P 2 y P 3) para que salgan una después de la otra? (Coloca P 3 en D 3, P 2 en D 2 y P 1 en D 1.) *Porque la grande es más pesada y está más adelante, la segunda es menos grande y está más lejos y la tercera, la más pequeña, está aun más lejos.*"

Desde el punto de vista del problema de la compensación que constituye la preocupación de este capítulo estos hechos presentan un cierto interés. Cuando se disocian los factores para facilitar la tarea del niño, descubre con corrección su papel: las bolas salen en función de su peso y las más cercanas a la periferia salen antes que las más alejadas. Sin embargo, por una parte el sujeto no habría podido establecer por su cuenta estas dos leyes si se le hubieran mezclado las situaciones, porque carece del método "permaneciendo igual todo lo demás" que sólo se constituye en el nivel III. Por otra parte, cuando a continuación de sus dos primeros descubrimientos se le ruega que compare entre sí bolas de pesos dife-

[2] Las distancias D 1, D 2 y D 3 están ordenadas a partir del centro; los pesos P 1, P 2 y P 3 son de orden creciente.

rentes en distancias distintas, se enfrenta todavía con las siguientes dificultades.

En primer lugar las imprecisiones de la percepción de la simultaneidad cuando las bolas salen desde lados opuestos unidas a las leves fluctuaciones del dispositivo, vale decir que se enfrenta con dos clases de desviaciones fortuitas que el sujeto no puede aún eliminar.

La segunda dificultad se localiza en las insuficiencias de la multiplicación lógica. Los sujetos de este nivel conocen esta operación y sobre todo la emplean cuando los dos factores actúan juntos para reforzar la situación (véase Mor). En cambio, cuando los dos factores intervienen al mismo tiempo, pero en el sentido de la compensación, en su explicación el niño hace intervenir a uno o al otro, sin comprender la compensación, y —extraña situación— dejando de buscar un producto multiplicativo. Esta situación presenta un problema: ¿debemos admitir que la multiplicación de las relaciones sigue siendo incompleta y que sólo interviene en los casos favorables a la intuición, o debemos pensar que el niño retrocede ante la indeterminación de los productos "más pesado × más cercano" y "más liviano × más lejano"? En contra de esta segunda interpretación podría responderse que el sujeto tiene los productos ante sus propios ojos, puesto que la compensación existe en el hecho mismo. Pero, por otra parte, se niega a comprobarla (véase Gui) porque no la comprende, o la comprueba sin comprender que se trata de una compensación. Es pues probable que en este caso particular, la multiplicación de las relaciones esté completa ya en todas las situaciones donde el producto se halla determinado, pero sus mecanismos operatorios no están aún bastante generalizados como para extenderse a los productos que implican tres posibilidades (más pesado × más cercano = la bola más pesada sale después de la más liviana o antes o al mismo tiempo por compensación).

§ 3. SUBESTADIO IIB: COMIENZOS DE LA COMPENSACION CONCRETA

El sujeto de este nivel no siempre logra explicar que dos bolas de distintos pesos salen juntas cuando se hallan a distancias diferentes del centro si se le presenta la situación sin un previo análisis porque no logra disociar por su cuenta los factores, ni, en consecuencia, concebir en el plano de las simples combinaciones posibles la compensación de dos factores que actúan en sentido contrario. Pero cuando gracias a las simplificaciones resultantes de las sucesivas presentaciones del experimentador, el niño consigue descubrir por separado la función del peso y la de la distancia, comienza entonces a comprender la compensación y, en ciertos casos, incluso la prevé:

Jol (9;3). P 3 en D 2 y P 3 en D 3: "*No salieron al mismo tiempo porque una está a mucha distancia y la otra a poca distancia.* ¿Y así (P 3 en D 1 y

P 2 en D 3)? *Esta* (P 3) *antes, porque es más grande y la otra es más pequeña.* (Experiencia: sucede lo contrario.) *Porque* (P 2) *está más cerca del borde.* ¿Con qué cosa cambia? *Con el grosor y con el peso.* ¿Y así (P 1 en D 3 y P 2 en D 2)? *Juntas, porque si se hubiera colocado a ésta* (P 1) *con una grande* (P 3) *la grande saldría en primer lugar, pero con* (P 2) *salen juntas porque es pequeña y tiene una pequeña distancia y la otra es grande y tiene una distancia mayor.* ¿Y (P 3 en D 3, P 2 en D 2 y P 1 en D 1)? *Esta* (P 3) *sale primero porque está más cerca del borde y es más grande;* (P 2) *está menos cerca del borde y es menos grande y* (P 1) *está menos cerca* (que P 2) *y es menos grande.* ¿Cómo hay que hacer para que salgan juntas? (Coloca P 3 en D 1; P 2 en D 2 y P 1 en D 3) *porque la pequeña tiene una distancia pequeña, la mediana una distancia media y la grande una distancia mayor* (que recorrer)."

Cro (10;2). Experiencia P 3 en D 2 y P 3 en D 2: *"Saldrán juntas porque las dos tienen el mismo grosor.* ¿Y (P 3 en D 1 y P 3 en D 2)? *La que está más lejos del centro salió antes, porque está más cerca del borde.* (P 3 en D 1 y P 2 en D 1.) ¿Cuál saldrá primera? (P 3) *porque es más pesada.* ¿(P 3 en D 2 y P 2 en D 3)? (P 2) *porque está más cerca del borde.* (Experiencia.) *Juntas porque aquélla es más pesada que ésta, pero ésta se encuentra más cerca del borde.* ¿Y (P 3 en D 3; P 2 en D 2 y P 1 en D 1)? *Esta* (P 3) *saldrá primero porque es más pesada y está más cerca del borde.* ¿Y (P 3 en D 1; P 2 en D 2 y P 1 en D 3)? *Todas juntas porque ésta es la más pequeña, pero se encuentra más cerca del borde, ésta no es tan pequeña pero está menos cerca del borde y aquélla, la más gruesa, es la que está más lejos del borde."*

La realización acabada de la coordinación (o multiplicación lógica) de los pesos y las distancias, una vez conocidas las funciones respectivas de estos dos factores constituye el principal progreso realizado desde el nivel II A. Por supuesto vuelve a encontrarse la multiplicación en el caso de los efectos acumulativos ($P_1 \times D_1$; $P_2 \times D_2$ y $P_3 \times D_3$). Sin embargo, aparece también la explicación y a veces la previsión (Cro) del caso $P_1 D_3$; $P_2 D_2$ y $P_3 D_1$ cuando las tres bolas salen juntas porque los dos factores se compensan. Se tiene pues la siguiente operación:

1) $(+P) \times (+D) =$ antes $\quad (=P) \times (+D) =$ antes
$(-P) \times (-D) =$ después $\quad (=P) \times (-D) =$ después
$(+P) \times (-D) =$ compensación $\quad (+P) \times (=D) =$ antes
$(-P) \times (+D) =$ posible $\quad (-P) \times (=D) =$ después

$$(=P) \times (=D) = \text{igualdad}$$

en la que $\pm P = \pm$ pesado, $\pm D =$ mayor o menor distancia a partir del centro.

De este modo volvemos a encontrar el mismo cuadro de doble entrada señalado en el caso de las relaciones de trabajo (cap. XII, § 3) o en el de la densidad, etcétera, en el mismo nivel II B.

Por lo tanto podríamos caer en la tentación de considerar adquirida la noción de compensación multiplicativa a partir de ese subestadio. Sin embargo existen dos circunstancias que impiden que se le atribuya aún esa generalidad. En primer lugar, recordémoslo, el sujeto no logra aún disociar los factores por su propia cuenta: ejecuta con corrección la operación cuando se le preparan los datos correspondientes, pero ello no equivale a la organización de modo espontáneo de la deducción mediante una estructuración previa de los elementos de esta deducción (procedimiento general del método experimental que requiere la existencia de una combinatoria formal). En segundo lugar, la operación de multiplicación lógica con la que debe contentarse el sujeto en los niveles concretos sigue indeterminada para los casos $(+P) \times (-D)$ y $(-P) \times (+D)$: puede entonces existir una compensación, pero no es el resultado necesario de estos productos. Para que exista una determinación completa, tiene entonces que recurrirse a las proporciones que, también ahora, requieren la presencia del pensamiento formal.

§ 4. ESTADIO III: DISOCIACION ESPONTANEA DE LOS FACTORES Y COMPENSACION POR PROPORCIONALIDAD

A partir del nivel III A el sujeto puede organizar por su propia cuenta la experiencia y anticipar las compensaciones mediante un sistema de operaciones proposicionales sin que por ello logre establecer una deducción completa:

Cham (10;7 adelantado) coloca al comienzo al azar P 3 en D 3, P 2 en D 2 y P 1 en D 1: "*Salieron una después de la otra.* ¿Te asombra? *No, la mayor debía salir después porque va menos rápidamente... ¡Ah! no, es al revés: cuanto más al borde está más rápidamente gira.* (Para probarlo coloca P 3 en D 3, P 3 en D 2 y P 3 en D 1, luego durante un nuevo ensayo P 1 en D 3 y P 1 en D 2 y modifica entonces las distancias con pesos iguales y realiza la contraprueba con los pesos extremos.) *Estas* (D 3) *salieron antes. Después salieron las del medio* (D 2)." A continuación y después de algunos nuevos ensayos acerca de la distancia, descubre que al colocar P 3 en D 1 y P 1 en D 3 las bolas salen juntas, pero que al colocar P 3 y P 2 en D 3 "*la grande sale antes*". Entonces compara la función de la distancia con un problema de equilibrio: "*Es como una balanza, un poco* (en el sentido de los movimientos de balanceo), *es una cuestión de equilibrio: si* (P 3) *y* (P 1) *están en* (D 3) *no están en equilibrio; si están en* (D 2) *hay un poco más de equilibrio; si están en* (D 1) *hay un equilibrio aún mejor, y si están en el centro está totalmente equilibrado: cuanto más hacia el medio están menos rápidamente van... Pero si* (P 3) *está en* (D 1) *y* (P 1) *en el centro, la grande sale antes.* ¿Qué cosa entra en juego? *El grosor y un poco los agujeros: no: únicamente el grosor, porque los agujeros son todos iguales; y el impulso, el*

ímpetu. ¿Qué cosa establece al equilibrio? *El grosor de las bolas y los lugares: si se coloca el mismo grosor* (P 1) *en* (D 3), *antes sale* (P 1) *en el centro. Para hacerlas salir al mismo tiempo, hay que colocar una grande aquí* (en D 1 cuando se tiene P 1 en D 3)."

Def (11;2) también descubre el papel del peso y la distancia. Se le pide que prevea el resultado de P 3 en D 1 y P 2 en D 2: "*Saldrán al mismo tiempo. La grande tiene que recorrer un trayecto más grande, pero es más pesada y las cosas más pesadas van más rápido.* ¿Y (P 3 en D 1; P 2 en D 1; P 2 en D 2 y P 1 en D 3)? *Saldrán al mismo tiempo. La grande es más pesada, pero tiene que recorrer un trayecto mayor;* (P 2) *es menos pesada que* (P 3) *pero es más pesada que* (P 1), *pero tiene que recorrer un trayecto más largo, entonces viene a ser lo mismo.*"

Vis (12;9) después del mismo razonamiento: "*Hay una compensación.*"

Dub (13;4) después del descubrimiento propio de los dos factores: "¿Puedes conseguir que las bolas salgan al mismo tiempo? *Hay que establecer una proporción: el peso, luego la distancia* (coloca P 3 en D 1 y P 2 en D 3). *No salieron juntas por causa de la diferencia de peso y la diferencia de distancia: tiene que hacer contrapeso exactamente.*"

Resulta sorprendente que cuando el sujeto se torna capaz para disociar por su propia cuenta los factores y experimentar de modo espontáneo enseguida adopta una nueva actitud hacia la compensación y la concibe a la vez como el producto de un equilibrio y una proporción. En efecto, en vez de representarse las distancias como se lo hacía hasta el momento (trayectos más o menos largos que deben recorrerse hasta el borde del disco) Cham las considera desde el punto de vista cinemático en relación con el centro: cuanto más lejos del centro se encuentre la bola, más movimiento realiza, mientras que cuanto más cerca se encuentre de él más en equilibrio está: de ahí la proporción inversa entre las distancias y los pesos, que Dub invoca de modo explícito y Vis llama una compensación.

Ahora bien, ya que los métodos de disociación son el resultado de la combinatoria que aparece con los comienzos del pensamiento formal y ya que la estructura de conjunto de este pensamiento implica el grupo *INRC* que constituye la fuente del esquema del equilibrio y también del esquema de la proporcionalidad, que son los que explican la noción de compensación, esa convergencia entre los métodos de experimentación y las concepciones no resulta fortuita.

El esquema de la compensación es pues de otra naturaleza en el nivel III A que en el estadio II. En el nivel II B la compensación es todavía de naturaleza aditiva por más que sea la resultante de una multiplicación de relaciones: la relación "más pesado" o "más peso" (entendida en el sentido de una diferencia aditiva) multiplicada lógicamente por la

relación "más cercano" (entendida también como una diferencia aditiva) explica la compensación. Por el contrario, en el nivel III A, la compensación implica un sentimiento nítido de proporcionalidad y cuando Dub afirma que la "diferencia de peso" no compensa la "diferencia de distancia" en el caso P 3 D 1 P 2 D 3 y no hace exactamente "contrapeso", toma el término "diferencia" en el sentido de una relación y "contrapeso" en el sentido de dos relaciones proposicionales que pueden compensarse para valores bien determinados.

Es cierto que los sujetos anteriores no nos brindan precisamente proporciones métricas. Pero, por una parte, no se les pidió tal cosa y, por la otra, dan testimonio nítido de un esquema cualitativo de proporcionalidad que se cuantificará métricamente de modo espontáneo en el nivel III B:

Vir (13 años) realiza por su cuenta las combinaciones *P 3 D 3* y *P 3 D 2*, luego *P 2 D 1* y *P 3 D 1* y dice: *"Es una ley: la más liviana parte más tarde en relación con la más pesada."* Luego P 3 D 1 y P 3 D 2 y por último P 1 D 1 y P 1 D 2: *"La que estaba más lejos* (del centro) *salió primero."* Después coloca P 2 D 3 y P 3 D 2: *"Van a salir al mismo tiempo porque hay un equivalente en peso y un equivalente en impulso: es como si colocara* (P 2) *en* (D 2) *y* (P 1) *en* (D 3)."

Cai (14 años): *"Depende de cómo se las coloque: Si queremos que salgan juntas, los pesos tienen que disminuir proporcionalmente a la longitud.* ¿Cómo lo pruebas? *Una bola de ½, otra de ⅔ y la tercera de 1* (para las distancias D 3, D 2 y D 1). ¿Y si la distancia es mayor? *Hay que establecer la misma combinación proporcional."*

La proporción anticipada del nivel III A se ha convertido pues en una proporción efectiva con una posible traducción numérica (Cai), los "equivalentes" cuantitativos (Vir asegura de este modo la compensación). Nos es entonces posible retomar el problema anunciado al comienzo de este capítulo y preguntarnos si desde el punto de vista psicológico la idea de compensación desencadena la de proporciones o si sucede al revés, salvo por supuesto que desde el comienzo exista una interdependencia.

§ 5. PROPORCIONES Y COMPENSACION

Los análisis anteriores (caps. XI a XIII) permitieron comprobar que la proporcionalidad constituye un esquema general, relacionado con el grupo de la doble reversibilidad de las recíprocas e inversas (grupo *INRC*), a veces con la significación que adquiere en el caso de un equilibrio mecánico, a veces con otras significaciones (geométricas, etcétera). Ahora bien, lo común a esas diversas significaciones del grupo *INRC* es la intervención de procesos de compensaciones, expresados mediante la reciprocidad *R*, a diferencia de las simples inversiones *N*; y lo común a todas

las formas de proporcionalidad descubiertas por el sujeto es la intervención de los juicios de compensación. Cuando ante dos variables independientes comprende que el aumento de una produce un resultado idéntico al producido por la disminución del otro, el sujeto construye el esquema cualitativo de la proporcionalidad. En efecto, la estructura de las proporciones implica siempre un elemento de compensación: cuando se tiene $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, los productos $xy' = yx'$ constituyen un sistema de compensaciones de tal modo que toda modificación del valor de x debe compensarse —si se conserva la igualdad— con una modificación de por lo menos uno de los otros términos.

Sin embargo esa noción de compensación se impone con una evidencia intuitiva muy diferente según los casos. En primer lugar es más sensible cuando la compensación asegura la conservación de un efecto material (tamaño de una sombra, etcétera) y no la de una simple relación (conservación del paralelismo en el teorema de Tales). En particular resulta significativa cuando los factores recíprocos aseguran el equilibrio de un sistema mecánico, etcétera.

Cierto es que la proporcionalidad misma puede obtenerse con mayor o menor facilidad según se trate de proporciones directas o inversas y factores más o menos fáciles de comparar desde el punto de vista de sus unidades. Por ello, en el caso particular de la fuerza centrífuga en el que se trataba de analizar compensaciones evidentes a la percepción, reducimos los pesos sólo a tres diferencias de unidades, P 1, P 2 y P 3 y las distancias D también a tres: la proporción P 1/P 3 = D 1/D 3 resulta entonces de tal simplicidad intuitiva que descarta toda necesidad de cálculo.

Ahora bien, resulta sorprendente que, incluso en este caso, el esquema de la compensación precede al de la proporcionalidad, lo cual equivale a afirmar que el sujeto necesita previamente despejar la posible conservación de un mismo resultado (simultaneidad de las salidas) para encontrar las proporciones, mientras que bien podría haber tomado como punto de partida las relaciones en juego y sus proporciones para de ahí extraer la idea de una posible compensación. En otros términos, cuando el sujeto descubre que un aumento del peso desencadena el mismo resultado que un aumento de la distancia y que por lo tanto puede compensarse con una disminución de la distancia, se halla en condiciones de encontrar la proporción inversa entre los pesos y las distancias, mientras que luego de comprobar que las bolas salen con tanta más rapidez cuanto más pesadas son y tanto más tarde cuanto más cerca del centro están, hubiera podido establecer la proporción inversa y a partir de ella deducir las equivalencias y compensaciones posibles.

Si designamos con p al enunciado del aumento de peso (de donde $\bar{p}$ es su disminución) y con q al aumento de distancia a partir del centro (de donde $\bar{q}$ es su disminución si p, $\bar{p}$, q y $\bar{q}$ se limitan a los cambios),

si además llamamos r y $\bar{r}$ a las proposiciones que afirman que una bola sale antes o después que otra y r_0 al enunciado de la simultaneidad, comprobamos que el sujeto comienza por plantearse lo siguiente:

1) $p \supset r$ y $q \supset r$

de donde:

2) $r_0 \supset (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$

que constituye la expresión misma de la compensación: para que una bola salga al mismo tiempo que otra, en el caso de la modificación del peso o la distancia, es necesario que a la vez sea más pesada y se encuentre más cerca del centro o que sea más liviana y se encuentre más lejos del centro.

De esta comprobación extrae entonces la siguiente proporción:

3) $\frac{p}{\bar{q}} = \frac{q}{\bar{p}}$ por ejemplo $\frac{P_2}{D_1} = \frac{D_2}{P_1}$

donde

4) $\frac{\bar{p}}{p} = R\frac{\bar{q}}{q}$ por ejemplo $\frac{P_1}{P_2} = \frac{D_1}{D_2}$

Pero a partir de (1) hubiera podido extraer las siguientes proporciones cualitativas:

5) $\frac{\bar{r}}{r} = R\frac{\bar{p}}{p}$ y 5 bis) $\frac{\bar{r}}{r} = R\frac{\bar{q}}{q}$

y de ahí por transitividad la proporción (4). A partir de (4) hubiera obtenido entonces los siguientes productos:

6) $p\bar{q} = Rpq$

de donde la posibilidad de una compensación para r_0 (prop. 2), verificable en la experiencia. Ahora bien, no sólo no procede así sino que descubre la compensación por medio de operaciones concretas a partir del nivel II B. Además el sujeto comienza con la compensación para luego encontrar las proporciones no sólo en el caso de la fuerza centrífuga sino en todos los casos estudiados hasta el momento (caps. XI a XIII). Es verdad que en general hemos tenido que dar la consigna de encontrar compensaciones o equivalencias: sucedió así porque, después de la experiencia, encontramos que era la vía más fácil para el adolescente y el niño ya que en cada una de estas experiencias las compensaciones se descubren de modo concreto a partir del nivel II B.

Siendo así debemos entonces buscar la razón de ese fenómeno constante. Recordemos en primer lugar los caracteres generales del esquema de la compensación. Sean dos factores de los cuales uno enuncia el aumento de valor con p o q y la disminución con $\bar{p}$ o $\bar{q}$ y sea un resultado cuyo aumento se enuncia con r, la disminución con $\bar{r}$ y la conservación con r_0. Pueden entonces presentarse dos casos distintos:

I. — Se puede tener:

7) $p \supset r$ y $q \supset \bar{r}$

(por ejemplo el aumento del diámetro de los círculos implica el aumento del tamaño de la sombra, mientras que el crecimiento de la distancia disminuye el tamaño de la sombra: cap. XIII).

En este caso, la compensación adquiere la siguiente forma:

8) $r_0 \supset (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

y la proporción entre p y q es directa. Llamemos p_1 y q_1 (o $\bar{p}_1$ y $\bar{q}_1$) a las transformaciones aportadas conjuntamente a los primeros elementos comparados y p_2 y q_2 (o $\bar{p}_2$ y $\bar{q}_2$) a las transformaciones aportadas en la segunda pareja. Entonces, para (8), se tiene:

9) $\frac{p_1}{q_1} = \frac{\bar{q}_2}{\bar{p}_2}$ o 9 bis) $\frac{p_1}{q_1} = R\frac{\bar{p}_2}{\bar{q}_2}$

(por ejemplo el diámetro del mayor de los dos círculos es a su distancia en relación con la fuente luminosa —distancia que también es la mayor— como el diámetro del pequeño círculo es a su distancia).

II. — Pero también puede tenerse (como en el caso de la fuerza centrífuga y la balanza) lo siguiente:

10) $p \supset r$ y $q \supset r$ (véase prop. 1).

En este caso, se tiene la siguiente compensación:

11) $r_0 \supset (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ (véase prop. 2).

Pero entonces la proporción es inversa, o sea:

12) $\frac{p_1}{q_2} = \frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_2}$ o $\frac{p_1}{q_2} = R\frac{\bar{p}_2}{\bar{q}_1}$

(por ejemplo el peso de la bola grande es a la distancia grande de la bola pequeña como el peso de la bola pequeña es a la distancia pequeña de la bola grande).

Una vez aclarado esto, se comprende entonces por qué el esquema de la compensación es accesible de modo más directo que el de la pro-

porcionalidad. La primera razón reside en que la compensación se funda directamente sobre relaciones cualitativas y lógicas como (7-8) o (10-11), mientras que las proporciones sólo adquieren una estructura verificable en la experiencia a través de su cuantificación numérica. Siempre existe por ello una suerte de anticipación lógica de la proporción (como igualdad respectiva de dos productos y dos sumas) previa a su establecimiento en forma métrica: percibimos ahora la significación de este esquema anticipatorio, puesto que constituye siempre un derivado del de la compensación. En segundo lugar, la compensación puede ser tanto aditiva como multiplicativa, lo cual sucede también en el caso de las proporciones lógicas pero no en el de las proporciones métricas (de ahí la tendencia constante del niño a buscar la proporcionalidad en la igualdad de las diferencias aditivas). Por último, la compensación constituye un derivado directo de la idea de reciprocidad, puesto que (prop. 8) $\overline{p} \cdot \overline{q}$ es la R de $p \cdot q$ y (prop. 11) $\overline{p} \cdot q$ es la R de $p \cdot \overline{q}$.

Ahora bien, en el caso de las relaciones, la reciprocidad constituye el fundamento de la reversibilidad y sólo puede componerse con la inversión N a través del intermediario del grupo *INRC*, fundamento de las proporciones.

CAPITULO XV

LAS DISPERSIONES PROBABLES Y LAS CORRELACIONES [1]

Los problemas del azar interesan al pensamiento formal desde dos puntos de vista. De modo general lo propio de esa forma de pensamiento es su referencia a lo posible y no sólo a lo real. Ahora bien, la probabilidad de los acontecimientos constituye precisamente una relación entre los casos realizados y los posibles. Por otra parte, la evaluación de la probabilidad de las relaciones o de las leyes supone ciertos instrumentos operatorios especiales como el cálculo de lás "correlaciones" o las "asociaciones". En su forma más simple la noción de correlación constituye un esquema operatorio de naturaleza formal, emparentado con el que acabamos de estudiar y, en particular, con las proporciones. Nos queda pues por analizar un doble problema: saber cómo los sujetos de 5 a 15 años reaccionarán a las fluctuaciones fortuitas que se producen durante las experiencias y analizar de qué modo construirán el esquema de las correlaciones.

I. LAS DISPERSIONES PROBABLES

Casi todos los fenómenos estudiados en las experiencias precedentes producen fluctuaciones fortuitas y, como hemos insistido en otra parte, una de las tareas esenciales del razonamiento experimental o de la inducción consiste precisamente en disociar lo deducible de lo fortuito.[2] Hasta ahora ya vimos que el niño y el adolescente elaboran lo deducible: ahora conviene examinar cómo reaccionan ante lo fortuito y cómo lo asimilan, incluso de modo indirecto, con lo deducible en forma de probabilidades. Para ello no vamos a concebir nuevas experiencias particulares —tarea a la que ya consagramos todo un volumen—[3] sino que simplemente vamos a analizar las respuestas de los mismos sujetos a propósito de las mismas

[1] Con la colaboración de Vinh Bang y de S. Taponier.
[2] Véase Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique*, t. II, cap. VI.
[3] Piaget e Inhelder, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, París, PUF, 1951.

experiencias; por otra parte nos limitaremos sólo a dos particularmente sorprendentes desde este punto de vista: el lanzamiento de una bola sobre un plano horizontal (cap. VIII) y el equilibrio entre la presión de un pistón y la resistencia de los líquidos (cap. X).

Tanto los puntos de detención de las bolas sobre el plano horizontal como los niveles alcanzados por el equilibrio entre una columna de líquido y un pistón plantean al sujeto cuestiones de azar, puesto que ni unos ni otros resultan constantes de modo riguroso en las mismas condiciones: por una parte, se tratará entonces de asignar una cierta ley de probabilidad a estas fluctuaciones y, por la otra, despejar las leyes o causas del fenómeno fundamental (movimiento o equilibrio) a pesar de esas fluctuaciones. Ahora bien, esto precisamente constituye el problema de la probabilidad de las desviaciones y el de las correlaciones.

§ 1. ESTADIO I: NI CONSERVACION NI LEY DE DISPERSION

En el nivel preoperatorio, ante el azar los sujetos presentan una actitud paradójica: esperan que frente a condiciones semejantes los fenómenos se repitan de modo idéntico o según una progresión, etcétera; luego, por una parte, cuando comprueban la existencia de pequeñas fluctuaciones niegan la conservación de las cantidades en juego (materia, etcétera) y piensan, por la otra, en la total arbitrariedad de los puntos de detención:

Mey (6;8) para el plano horizontal comprueba que la bola grande de aluminio se detuvo en cierto punto (a los 20 cm): "Y si se la vuelve a lanzar, ¿dónde llegará? *Más lejos* (experiencia: 21 cm). ¿Y si la lanzas de nuevo? *Un poquito más lejos porque ya fue muy lejos* (experiencia: 19 cm). ¿Por qué se detuvo allá? *Porque la banderita* (marca de los puntos de detención) *siempre está ahí.* ¿Y si la vuelves a tirar? *Un poco más lejos porque siempre va un poco más lejos.*"

Gros (5;9) en el caso de los líquidos, prevé que si se vuelve a colocar la caja roja (500 g) el agua volverá *"al mismo lugar"* mostrando la bandera roja. Como el agua supera un poco el nivel previsto, Gros explica *"porque la caja es más pesada"*, *"va más rápido"*, etcétera. Se le muestra entonces una serie de posiciones y se le pregunta si las estima posibles o imposibles para esta misma caja roja: todas son posibles. Lo mismo sucede para las otras cajas.

Tac (6;0): "¿Adónde irá el agua si vuelve a colocarse esta caja (1500 g)? *Allí. Irá adonde estaba antes.* ¿Por qué? *Porque es lo mismo.* (Experiencia: más arriba.) ¿Por qué? *Porque es más pesada* (el agua)."

Aquí vuelven a encontrarse pues las reacciones conocidas de los niños pequeños que niegan el azar, luego ante las fluctuaciones creen que todo es posible, o bien buscan un orden oculto (acción de la bandera en

Mey): o lo arbitrario, o un desorden momentáneo que enmascara razones invisibles que tienen que adivinarse. En ambos casos, la actitud del sujeto se halla reforzada por su carencia de las nociones de conservación: la caja puede volverse más pesada al actuar más rápidamente, el agua puede aumentar su cantidad o peso, etcétera.

§ 2. ESTADIO II: REACCIONES PROBABILISTICAS DIFUSAS (II A); LUEGO DETERMINACION DE UNA ZONA DE DISPERSION (II B)

A partir de los 7-8 años la reacción del sujeto es muy diferente: no sólo no se asombra ante las dispersiones sino que además sus previsiones las toman a menudo en cuenta ("más o menos en el mismo lugar"). Como de costumbre, la aparición de la noción de azar se caracteriza en primer lugar por una actitud sobre todo negativa plena de prudencia y conciencia acerca de la dificultad de las previsiones:

Bout (7;6): "¿Si vuelves a lanzar (la misma bola sobre el plano horizontal) 10 ó 20 veces? (Puede llegar) *allí* (1,60 m), *allí* (1,79) *o allí* (1,80). ¿Crees que puede llegar una vez hasta el extremo? *No.*"

Dub (7;5): "(La bola llegará) *casi del mismo modo.* ¿Puede llegar hasta el extremo? *No.*"

Y para el caso de los líquidos:

Gui (8 años): "¿Por qué el agua llegó un poco más abajo esta vez? *Porque se salió un poco de agua* (en el tubo del pistón). Y ahora, ¿por qué se fue un poco más arriba? ...(no hay explicación durante dos oportunidades sucesivas)."

Des (8 años) primero, para explicar las desviaciones hacia arriba, formula la hipótesis de que los tornillos están más apretados, luego "*porque depositó* (la caja) *muy bruscamente.*"

Luego de esas reacciones difusas, que señalan sobre todo cómo el sujeto se desorienta ante lo fortuito, vale decir ante aquello que resiste a sus operaciones nacientes, los sujetos, a partir de un promedio de 9 años, ya no se conforman con la caracterización de las fluctuaciones mediante la noción esencialmente negativa del "más o menos": intentan encontrar causas sistemáticas de las fluctuaciones e incluso, cuando se les pide que prevean el resultado de 10 a 50 pruebas sucesivas, buscan delimitar verdaderas zonas de dispersión.

En la experiencia de los líquidos (cap. X) se insistió en particular sobre el primer punto:

Buc (8;5): "*A veces desciende con mayor rapidez, a veces con una menor.*"

Zbi (9;4): "*Tal vez dejé que cayera con más fuerza... Tal vez dejé que el agua cayera hasta aquí* (punto de partida diferente) *y que la caja cayera más fuerte.*"

El segundo punto se planteó con referencia al plano horizontal (cap. VIII):

Cor (9 años): "¿Adónde va a llegar ahora (bola grande de aluminio a 36 cm)? *Lo mismo, por allí.* Y si intentamos 10 veces seguidas, ¿podría llegar aquí (1 m)? *No.* ¿Y allí (65 cm)? *Sí.* (Experiencia: 42, 36, 37 y 38 cm.) ¿Se puede decir ahora adónde irá? *Sí, por allí* (muestra entre 27 y 47 cm). ¿Podría llegar hasta aquí (60 cm)? *Sí, a veces.* ¿Y allí (1 m)? *No, entre aquí y allí* (de 10 a 65 cm)."

Win (9;8). Pequeña bola de aluminio a 1,80, luego a 1,62 m: "¿Te asombra esta diferencia? *No.* ¿Y si la lanzamos de nuevo? *No tan lejos como la primera vez.* (Experiencia 1,36; 1,51 y 1,48 m.) ¿Y si la lanzamos 50 veces? *Por allá* (entre 1,27 y 1,95 m)."

Jos (10;2). Pequeña bola de metal blando a 27 y 32 cm: "¿Y si la arrojas 50 veces? *Habrá mayores espacios entre las banderas.* ¿Irá a todas partes? *No, aquí* (de 20 a 40 cm)."

Luc (11 años). La misma bola: "*No más lejos que esto* (37 cm) *y no más cerca que esto* (20 cm). Si la arrojas 10 veces ¿adónde irá con más probabilidad? *Por aquí* (28-29 cm). ¿Por qué? *Porque es más o menos la mitad.*"

Fra (11;8): "¿Si jugáramos 50 veces? *Entre 20 y 50 cm.* ¿Cómo haces para saberlo? *Se ve más o menos adónde va.* ¿Habrá regiones con más banderas? *Sí, aquí* (35-40 cm) *porque si se lanza con regularidad habrá más en el medio que sobre los bordes.*"

Durante este subestadio II B el azar, pensado en primer lugar como aquello que resiste a las operaciones, comienza pues a asimilarse con las operaciones mediante la búsqueda de las causas de fluctuaciones y la determinación de la amplitud de estas últimas: de donde se obtiene la delimitación de una zona y cerca del final del subestadio la comprensión de que las desviaciones constituirán una curva de conjunto con una frecuencia mayor en la región media y menor en los extremos. El sujeto Fra intuye así la curva de Gauss, cuya representación en los diferentes niveles de evolución estudiamos en otra parte.[4]

Resulta además sorprendente comprobar que los sujetos del nivel II B que establecen de modo espontáneo una zona de dispersión hacen intervenir de entrada por otra parte por lo menos dos factores en las causas de la detención: peso y volumen, o volumen y materia, etcétera (véase cap. VIII, § 3). Pero como en este estadio no se produce aún la diso-

[4] *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, cap. II.

ciación sistemática de los factores, las afirmaciones acerca de la causalidad y la zona de dispersión no pueden traducirse mediante una estructura implícita de correlaciones: la dispersión constituye simplemente el resultado de una multiplicidad de causas, no se realiza esfuerzo alguno para analizar sus respectivas partes.

§ 3. ESTADIO III: EXPLICACION DE LA DISPERSION Y DETERMINACION DE LA LEY CON FLUCTUACIONES FORTUITAS

La experimentación activa característica del estadio III, conduce al sujeto a tomar en cuenta las dispersiones, cuya forma busca al mismo tiempo y a despejar la ley bajo las variaciones fortuitas, lo que tarde o temprano supone la formación de un esquema de correlaciones.

En primer lugar veamos un caso relativo a los líquidos:

Boi (14;6): "¿Adónde irá el agua? *Al mismo nivel que antes.* (Más arriba.) ¿Qué dice usted de esto? *Depende del roce del aparato. Tal vez rozó un poco más.* ¿Seguro? *No. Tal vez se tapó arriba. No, hubiera subido menos; el aire se hubiera comprimido.* ¿Si se la coloca de nuevo? *Si la experiencia es exacta, el agua irá al mismo nivel que cuando el cilindro se deslizó mejor.* ¿Dónde sube cuando se desliza mejor? *Probando varias veces el sistema se encontrará un lugar.* ¿Si se prueba 5 veces? *Se establecerá la media entre las 5.* Cuando se desliza mejor, ¿corresponde a la media? *Corresponderá al mejor punto obtenido.*"

Y algunos ejemplos para la bola sobre el plano horizontal:

Chap (13;3): "*Llegará casi allí* (0,9 a 1 m). ¿Puede llegar hasta allá (1,60 m)? *No, porque es demasiado pesada.* ¿Y ésta (más gruesa y más liviana)? *Por aquí* (1,50 a 1,70 m). (Experiencia: 1,60 m.) ¿Por qué? *Porque es menos pesada que aquélla.*"

Ray (14;4) comprueba una dispersión de 1,10 a 1,55 m: "*Tal vez la manera de arrojarla cambia* (intenta arrojarla con una fuerza constante). *Veo que la fuerza del resorte varía. Teóricamente debería ir al mismo lugar. Habrá que reducir el roce.* ¿Usted puede probar que hay roce? *Teóricamente la pequeña debería ir más lejos: la resistencia del aire funciona con el volumen* (ahora confunde este factor con el roce). *Si se toman dos bolas del mismo peso con un volumen diferente, puede probarse que el roce desempeña un papel.*" Hace la experiencia y verifica lo supuesto a pesar de la dispersión; el número de los casos favorables le parecen suficientes.

Lev (15;5) quiere probar el papel del volumen: "*Estas dos bolas tienen el mismo peso y no tienen el mismo volumen.* (Experiencia.) *Van* (casi) *a la misma distancia y el volumen no desempeña el papel principal.* ¿Desempeña un papel pequeño o ninguno? *Un papel pequeño porque la bola pequeña de madera va*

más lejos que la grande." Considera pues los casos favorables y los desfavorables (sin calcularlos) a pesar de la desviación poco fuerte. En cuanto a la dispersión se produce por la forma en que se arroja la bola: "*Hay veces que tiro más fuerte que otras.* ¿Qué zona? *Aquí y allá* (9 a 20 cm). *Casi es el trayecto que se cumple cuando tiro normalmente. Las excepciones se localizan en los bordes. Roza un poco, se ven huellas: es una prueba de que se frena.*"

Nic (15 años) quiere mostrar que la liviana va más lejos que dos bolas del mismo peso más pesadas que la primera, pero observa fluctuaciones: "*Mi hipótesis sería justa pero sólo para los impulsos pequeños.* ¿Entonces la hipótesis es falsa? *Si mi hipótesis es falsa, entonces no sé cómo razonar. No pensé que los impulsos no tuvieran la misma fuerza.*" Mantiene pues al factor "liviano" a pesar de la interferencia de los campos de distribución.

La novedad de estas respuestas en relación con las del estadio II es muy clara. Como los sujetos del estadio II se limitan a describir la experiencia bruta mediante operaciones concretas sin disociación metódica de los factores, descubren las fluctuaciones del mismo modo en que descubren lo dado en la experiencia bruta e incluso construyen a partir de ahí leyes de dispersión (curva en forma de campana con frecuencia máxima en el medio); sin embargo no van más allá, porque sólo buscan alcanzar lo que es, sin disociar los factores de lo real según las combinaciones posibles. Los sujetos del estadio III por el contrario quieren alcanzar las leyes a través de una disociación precisa de los factores según todas las combinaciones posibles, y se enfrentan con la dispersión de los resultados que consideran un obstáculo al que también debe analizarse con método. ¿En qué consiste entonces ese método?

Si nos atenemos a estas reacciones espontáneas y todavía no buscamos (como lo haremos más adelante) que los sujetos precisen lo que consideran casos favorables o casos desfavorables para una hipótesis dada, comprobamos que el método que emplean nos acerca al problema de las correlaciones.

En primer lugar vemos que la simple estadística de los casos (la determinación de la zona de dispersión con su "media" con una frecuencia superior) no basta para resolver los problemas planteados. De este modo Boi propone establecer la media de los puntos de detención del agua para juzgar cuál es el nivel normal para un peso dado, pero reconoce que esta media será distinta al "mejor punto obtenido": caso en el que el cilindro se desliza mejor. En particular Nic, al querer probar que una bola pesada va menos lejos que una liviana, se encuentra ante una interferencia de los campos de dispersión y comprueba que su hipótesis sólo se demuestra para los "impulsos pequeños", vale decir, para los trayectos más cortos obtenidos con las bolas pesadas y las livianas.

En segundo lugar, aparece por ello la formación de una nueva actitud intelectual, característica de este estadio III: la distinción entre casos favorables y casos desfavorables respecto de la hipótesis que debe verifi-

carse y la necesidad de decidir si pesan más los primeros que los segundos o si sucede al revés. Vemos así que Ray y Nic mantienen su hipótesis a pesar de las dispersiones comprobadas (y en el caso de Nic a pesar de las excepciones que constituye el resultado de los "grandes impulsos"), mientras que Lev cuando quiere demostrar el papel del volumen lo reduce a las proporciones de un papel pequeño (en oposición con el "papel principal") dada la cantidad de casos desfavorables.

Por lo tanto resulta importante intentar reconstruir los razonamientos del adolescente ante esa cuestión de los casos favorables y desfavorables. Así como vimos que siempre el esquema operatorio cualitativo de las proporciones (fundado en las vinculaciones interproposicionales) precede al cálculo métrico de estas mismas proporciones, así también vamos a comprobar hasta qué punto la estimación simplemente cualitativa de los campos de dispersión presente facilita al sujeto el acceso al esquema operatorio de las correlaciones.

Supongamos por ejemplo que el sujeto quiera demostrar que las bolas más pequeñas van más lejos. Llamemos p a la proposición que enuncia que la bola considerada es más pequeña que la bola tomada como testigo y $\bar{p}$ a la proposición que enuncia que es más grande; llamemos q al enunciado de que la bola pequeña va más lejos que la otra y $\bar{q}$ al enunciado de que va menos lejos. La comprobación de las fluctuaciones conduce entonces al sujeto a admitir la verdad de las 4 combinaciones posibles, o sea lo siguiente (donde * es el signo de la "afirmación completa"):

$$1)\ (p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = (p * q)$$

Ahora bien, en estas 4 posibilidades se reconocen de entrada los 4 casilleros de los cuadros de "asociaciones" tales como se los utiliza en el cálculo de esas formas simplificadas de correlaciones llamadas "coeficientes de asociación" (fórmulas de Yule o de Bravais Pearson). En este caso particular, los sujetos no enumeran los casos que corresponden a las 4 posibilidades ni realizan el cálculo de las relaciones existentes entre los números encontrados. Pero, a falta de esta cuantificación numérica, se entregan a una cuantificación intensiva (en $>$ o $<$) y se conforman con ella. Ahora bien, esta cuantificación equivale, así parece, a la evaluación

	pequeña (p)	grande $(\bar{p})$
lejos (q)	$a = p \cdot q$	$c = \bar{p} \cdot q$
cerca $(\bar{q})$	$b = p \cdot \bar{q}$	$d = \bar{p} \cdot \bar{q}$

de los casos a y d del cuadro (o sea $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$), y los casos b y c (o sea $p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$), y a la comparación de los dos conjuntos. En efecto,

los casos $a+d$ son los casos favorables (a la hipótesis que se trata de verificar) y los casos $b+c$ son los casos desfavorables: ahora bien, ésta es la comparación que los sujetos precedentes parecen realizar. Puede entonces anotarse del siguiente modo (el símbolo E representa al conjunto que verifica las proposiciones en juego):

2) $E[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] \gtrless E[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$ o sea
$(a+d) \gtrless (b+c)$

Bastaría que en vez de contentarse con esa comparación en $>$ o $<$, los sujetos determinasen de modo numérico la diferencia $(a+d)-(b+c)$ y su relación en función del todo $(a+d)+(b+c)$, para encontrarse ante una noción explícita de correlación. ¿Se constituye esa noción realmente durante el estadio III? Esta es la pregunta que ahora intentaremos resolver mediante un método más directo.

II. LAS CORRELACIONES

El esquema implícito de correlación cuya existencia acabamos de suponer en los adolescentes del estadio III merece un análisis más detallado. Imaginemos entonces un dispositivo construido para que el sujeto pueda enumerar con facilidad los casos favorables y los casos desfavorables, con el fin de examinar las relaciones que entre ellos establecerá y para ver si estas relaciones tienden a acercarse a una de las fórmulas de "asociaciones" —cualquiera que sea— utilizadas en el cálculo de las correlaciones.

Se plantea simplemente el problema de la correlación entre el color de los ojos y el de los cabellos. Disponemos de unas cuarenta cartas con dibujos de rostros con ojos y cabellos coloreados, según las 4 siguientes asociaciones:

$a =$ ojos azules y cabellos rubios $(= p \cdot q)$
$b =$ ojos azules y cabellos negros $(= p \cdot \bar{q})$
$c =$ ojos negros y cabellos rubios $(= \bar{p} \cdot q)$
$d =$ ojos negros y cabellos negros $(= \bar{p} \cdot \bar{q})$

Se le da entonces al sujeto un cierto número de figuras y se le pregunta si considera que existe o no una relación entre el color de los ojos y el de los cabellos, no en forma general, sino cuando se consideran los únicos datos presentados. Al comienzo puede procederse de dos maneras diferentes: dejar al sujeto que establezca su clasificación (que construya los 4 casilleros de un cuadro de doble entrada) o presentarle las cartas ya clasificadas según las 4 posibilidades, situación que en este caso permite insistir más en las combinaciones numéricas posibles. Por ejem-

plo, se presentarán combinaciones $a\,b\,c\,d$ de 4, 0, 0, 4 individuos; o de 4, 4, 4, 4; o de 6, 6, 2, 2; o también de 13, 8, 3, 8, etcétera, y cada vez se le solicitará al sujeto que aprecie las relaciones en juego. Además, pueden proporcionar al sujeto dos colecciones distintas por ejemplo, 6, 4, 2, 4 y 4, 4, 4, 4 y preguntarle en cuál de las dos la correlación es más nítida. Por último, puede pedirse al sujeto que elimine cartas de tal modo que refuerce la correlación y examine en cuál de las 4 asociaciones se apoya su eliminación.

Aclarado esto, deben examinarse una serie de reacciones interesantes desde el punto de vista de la lógica de las proposiciones, el único que aquí nos concierne en oposición con los del cálculo o la inducción propiamente dicha. Si se designa con p al enunciado que comprueba la presencia de los ojos azules y con q a la presencia de los cabellos rubios, los casos favorables a la correlación corresponderán, en efecto, a la equivalencia $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ y los casos desfavorables a la exclusión recíproca $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$. Para probar una correlación será necesaria la previa constitución de dos clases de individuos que satisfagan respectivamente estos dos tipos de relaciones $(p = q)$ y $(p \vee\vee q)$, luego el establecimiento de una relación determinada entre estas dos clases.

Sin embargo la constitución de estas clases o estas relaciones presentará, como acabamos de verlo, un cierto número de dificultades: todavía en el nivel III A a menudo el sujeto comenzará por encarar la asociación de modo aislado (o sea $p \cdot q$) sin comprender que los casos d (que corresponden a $\bar{p} \cdot \bar{q}$) constituyen también una prueba. Y, cuando intente relacionar los casos a (o sea $p \cdot q$) con otra asociación, a veces en primer lugar pensará en el caso b (o sea $p \cdot \bar{q}$) más que en el caso d, y procederá así de modo vertical (ojos) u horizontal (cabellos) en el cuadro de doble entrada, antes de comprender que la comparación debe hacerse sobre la diagonal.

Luego, una vez superadas esas dificultades iniciales, el problema reside en comprender que la correlación no consiste en una simple probabilidad, es decir, una relación elemental entre los casos favorables $(a + d)$ y el conjunto de los casos posibles $(a + b + c + d)$. Sin duda alguna el problema verdadero de la correlación reside en este punto, y ello explica por qué la correlación sólo se adquiere en el nivel III B, aunque se posea la probabilidad simple en el nivel III A en su forma multiplicativa (relación).[5]

En efecto, en su forma más elemental —la aditiva— el coeficiente de asociación R responde a la siguiente fórmula:

$$R = \frac{(a + d) - (b + c)}{(a + d) + (b + c)}$$

[5] Véase *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, cap. V, § 3 y cap. VI, § 6.

Si designamos con E a los conjuntos de objetos que verifican tal o cual relación interproposicional, esta expresión puede entonces escribirse como sigue:

3) $\{E[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] - E[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]\} \;/\; \{E[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] + E[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]\}$

El descubrimiento de la correlación es pues el siguiente: después de encontrar las probabilidades $(a+d)/(a+b+c+d)$ y $(b+c)/(a+b+c+d)$ el sujeto debe además comprender que la correlación es una función de la diferencia $(a+d)-(b+c)$ en relación con el todo.

Por supuesto no hay que esperar que nuestros sujetos intenten de nuevo esas fórmulas o hagan el cálculo completo correspondiente. Sin embargo, desde el punto de vista que aquí nos interesa —el de los razonamientos cualitativos efectuados a propósito de las combinaciones numéricas presentadas— la diferencia $(a+d)-(b+c)$ intervendrá cuando el sujeto, después de construir las dos clases $(a+d)$ y $(b+c)$ que corresponden a las dos relaciones $(p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}) = (p = q)$ y $(p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q) = (p \vee\vee q)$ comprenda que, si se trata de probabilidades iguales, la correlación resulta entonces nula; y que recíprocamente la correlación sea tanto más fuerte en la medida en que la desigualdad $(a+d) > (b+c)$ sea mayor.

Ahora bien, interpretada de ese modo con independencia de toda formulación explícita, vamos a comprobar que en efecto la noción de correlación se descubre durante el subestadio III B, gracias a que el sujeto recurre a la lógica de las proposiciones. Resulta inútil volver aquí sobre las reacciones no probabilísticas del estadio I y sobre los primeros esquemas probabilísticos del estadio II: comenzaremos pues de entrada con el análisis del nivel III A, ya que sólo a partir de él el sujeto puede razonar sobre los conjuntos de cartas que se le proporcionan sin recurrir a lo real (razonamiento hipotético-deductivo).

§ 4. NIVEL III A: LA INTERPRETACION PROBABILISTICA DE LAS FRECUENCIAS CONSIDERADAS DE MODO AISLADO PERO SIN ESTABLECIMIENTO DE RELACION ENTRE LOS CASOS $(a+d)$ Y LOS CASOS $(b+c)$

El sujeto del nivel III A, de acuerdo con sus reacciones probabilísticas habituales, puede estimar probabilidades simples como relaciones entre casos favorables positivos y casos posibles relativos al carácter considerado: en consecuencia, estará en condiciones de apreciar las chances de que un individuo posea ojos azules cuando tiene cabellos rubios, cuando compare el número de los casos a con el número de los casos b o de los casos $a+b$. Sin embargo, no por ello consigue aún reunir el con-

junto de los casos favorables positivos y negativos ($a + d$) con el fin de relacionarlos con los casos desfavorables ($b + c$) y con el conjunto de todos los casos posibles. Veamos algunos ejemplos:

Lyn (12;4): "¿Ve usted sobre estas cartas (6, 0, 0, 6) [6] una relación entre el color de los cabellos y el de los ojos? *Sí, éstos* (d) *tienen el mismo color de ojos y cabellos.* Pero, para todo el grupo en general (se le muestra el conjunto de las cartas) ¿existe una relación entre los colores de los cabellos y los de los ojos? *No.* ¿Y aquí (d)? *Aquí sólo es negro.* ¿Y aquí (a)? *Es azul. Todos son azules.*" "Y aquí (6, 2, 4, 4) ¿hay una relación? *No. Sí cuando los cuatro* (subconjuntos) *están separados, pero no cuando están juntos.* ¿Por qué? *Porque algunos son amarillos* (rubios) *y azules, y algunos amarillos y negros.* ¿Y así (4, 4, 4, 4)? *En este caso hay más chances: todos son 4. Allí, si no me equivoco, hay dos* (b) *mientras que aquí es 4 y 4* (muestra a *a* y *b*). ¿Cuántas chances tiene usted de encontrar cabellos rubios si sólo ve ojos azules? *4 y 4: las mismas chances* (*a* y *b*)."

Se le dan todas las cartas para que las clasifique, lo hace de inmediato en función de las 4 asociaciones. Luego se le pide que construya dos grupos de tal modo que en uno haya más chances que en el otro de encontrar una relación entre los colores de los cabellos y los ojos: forma (3, 3, 4, 4) y (3, 6, 6, 4): "*Aquí se tienen más chances* (3, 3, 4, 4) *porque se tiene 3 y 3 y 4 y 4 mientras que allí 6 y 4 y 6 y 3.*" Con otras palabras, al mismo tiempo que constituye conjuntos correctos, Lyn los construyó y justifica su opinión razonando mediante relaciones *a/b* y *c/d* y no mediante relaciones diagonales.

Mor (13;6) ante el conjunto (10, 2, 3, 9) responde que "*uno corre el riesgo de equivocarse*": muestra los casos desfavorables *b* y *c*, pero no calcula las relaciones. "¿Y aquí (12, 0, 0, 12)? *Son los mismos colores, uno no corre el riesgo de equivocarse.* ¿Y así (8, 4, 6, 5)? *Uno puede equivocarse.* ¿Qué hay que hacer entonces para estar seguros? (Elimina los casos *b* y *c*.) Y si se tienen estos dos grupos (8, 4, 4, 8) y (11, 1, 7, 5), ¿dónde se está más seguro? *Aquí* (11, 1, 7, 5) *uno tiene menos chance de equivocarse porque hay menos excepciones* (muestra la relación de *a* con *b* o sea 11 a 1, pero sin ocuparse de los 7 casos *c*)."

Bon (14;3) en presencia del conjunto (5, 1, 2, 4) pretende que "*no hay relación alguna*" entre los colores de los ojos y los de los cabellos. "¿Por qué? *Justamente porque hay cartas diferentes* (muestra *b* y *c*). ¿Y acá (3, 0, 0, 3)? *Sí, porque los ojos negros están con los cabellos negros y los cabellos rubios con los ojos azules... Hay una relación máxima.* ¿Y en estos dos conjuntos (4, 2, 2, 4) y (3, 3, 1, 5)? *La relación es totalmente nula porque hay un número diferente de gente en cada parte.* Pero, ¿es lo mismo en los dos grupos? *No, aquí* (4, 2, 2, 4) *se tiene 4 y 4 y 2 y 2* (inicio de la relación en diagonal), *pero aquí* (3, 3, 1, 5) *se tiene 3 y 3* (= *a* y *b*) *se tiene el mismo número de cada lado* (de donde concluye que no puede preverse nada)."

[6] Los números de las figuras que corresponden a las cuatro combinaciones posibles se hallan indicadas en el orden *a, b, c, d.*

Bastan estos casos para poner en evidencia las dos dificultades principales que detienen a los sujetos del nivel III A. La primera, muy visible en Lyn, reside en el hecho de que, ante 4 combinaciones a $(=p \cdot q)$, b $(=p \cdot \overline{q})$, c $(=\overline{p} \cdot q)$ y d $(=\overline{p} \cdot \overline{q})$ el sujeto comprende que existe una relación entre los cabellos negros y los ojos negros (d) o entre los cabellos rubios y los ojos azules (a) pero no comprende que es la misma relación o la relación recíproca $(p \cdot q$ y $\overline{p} \cdot \overline{q})$: opone los casos a a los casos b y los casos d a los casos c, sin percibir que los casos a y d se apoyan uno sobre el otro y forman un único todo: el de los casos favorables a la relación de conjunto entre los colores de los ojos y los cabellos.

A partir de ahí se presenta entonces una segunda dificultad que procede de la misma fuente pero que dura más (casos Mor y Bon, que no presentan la primera dificultad pero se detienen ante la segunda): una vez admitido que los casos a y d son favorables a la relación buscada y que los casos b y c son desfavorables no calculan la relación entre los casos favorables y los casos desfavorables, o entre los casos posibles comparando la suma $(a+d)$ con la suma $(b+c)$ sino que sólo comparan a con b y d con c, cuando no se limitan a uno de estos pares (ab o cd dejando de lado al segundo): por ejemplo, para las dos relaciones iguales $(8+8$ contra $4+4$ y $11+5$ contra $1+7)$, Mor encuentra más favorable la segunda porque compara sin más 1 contra 11 con 4 contra 8. Lyn se limita asimismo a las relaciones entre a y b y entre d y c.

Un aspecto interesante de ese razonamiento mediante relaciones ab o cd y no por las diagonales ad y bc lo constituye la reacción de los sujetos ante la igualdad de los casos favorables y desfavorables $ad=bc$. Lejos de comprender que en ese caso la correlación resulta entonces nula los sujetos de este nivel tienen tendencia a considerarla como un caso privilegiado porque al razonar sólo con a y b (o sólo con d y c) hay igualdad de las chances positivas y negativas. Lyn prefiere de este modo el conjunto (4, 4, 4, 4), al conjunto (6, 2, 4, 4) porque hay "4 y 4: existen las mismas chances"; de ello deduce también, y esta vez con razón, que (3, 3, 4, 4) es más favorable que (3, 6, 6, 4) pero sobre la base de la misma equivocación: cree que hay igualdad $a=b$ y $c=d$ "porque se tiene 3 y 3 y 4 y 4". Entre los sujetos citados, sólo Bon comprende que en el caso (3, 3, 1, 5) no puede extraerse nada de $a=3$ y $b=3$ ("porque se tiene el mismo número de cada lado"), pero lo hace también en virtud de un razonamiento referido sólo a a y b.

Cerca de la finalización del subestadio III A se encuentra en cambio una etapa intermedia entre III A y III B. El sujeto empieza por los mismos tipos de razonamientos pero llega poco a poco a establecer las relaciones en diagonales y a considerar las probabilidades combinadas $(a+d)$ y $(b+c)$. Veamos algunos ejemplos:

Bab (14;3) en presencia del conjunto (5, 2, 1, 4) dice: *"Hay varios cabellos rubios con ojos azules, pero además hay otros* (muestra en el orden los casos *b, d* y *c*). *¿Existe una relación? Igual existe una relación: los que tienen ojos azules*

tienen en su mayoría cabellos rubios y los que tienen ojos negros tienen casi todos cabellos negros. ¿Cuántas posibilidades hay de acertar con exactitud? *En este grupo (a) hay 5 posibilidades y aquí (d y c) 4 posibilidades de acertar con exactitud y 1 de equivocarse.* ¿Y en el conjunto? *3 posibilidades de equivocarse sobre 12* [por lo tanto $(b + c)/(a + b + c + d)$] ... *3 posibilidades sobre 12.*"

"¿Y aquí (6, 0, 0, 6)? *Se tiene el mismo número de chances... No, se tienen todas las chances de acertar justo.* ¿Y aquí (5, 1, 3, 3)? *Una chance sobre 12 de no acertar, no, además están éstos (c): no, 4 chances sobre 12.* ¿En cuál de estos dos grupos (5, 2, 1, 4) y (5, 1, 3, 3) se tienen más chances de acertar? *Es lo mismo: 5 y 5* (cuenta los *a*); *es lo mismo.* ¿Y cuántas chances hay de no acertar? *3 chances sobre 12 y 4 chances sobre 12.*"

"¿Y en estos dos grupos (4, 2, 2, 4) y (3, 3, 1, 5)? (Clasifica las cartas, luego compara los casos *a* entre sí y los casos *d* entre sí, luego cuenta todo): *4 sobre 12 de no acertar aquí y allá.*" Se le pide por último que construya un conjunto tal que no pueda preverse nada: construye (1, 1, 1, 1), luego (2, 2, 2, 2), etcétera, y comprende así que en tales casos la correlación es nula.

Vec (14;6) clasifica con corrección el conjunto (5, 1, 2, 4): "¿Existe alguna relación? *No especialmente: están éstos* (aparta *a* y *d*). Para que haya una relación ¿qué hay que eliminar? (muestra *b* y *c*). *Sólo puede haber una ley en ciertas proporciones.* ¿Cuáles? *Hay una mitad, no 2/6 y 4/6* (calcula *c* sobre $c + d$, y *d* sobre $c + d$) *y para los ojos azules 5/6 y 1/6* (calcula *a* sobre $a + b$, y *b* sobre $a + b$). ¿Y si consideras todo el grupo? *Cerca de los 9/10, no de los 9/12 que están más o menos dentro de la ley y de los 3/12 que están fuera de la ley.*"

"¿Y así (6, 0, 0, 6)? *La ley es exacta: no hay excepción alguna.* ¿Y aquí (4, 2, 3, 3)? *Acá la proporción es bastante débil, casi mitad-mitad.* ¿Exactamente? *7/12 para la regla y 5/12 para las excepciones.* ¿Se puede hablar de ley? *Menos. Para los cabellos negros no se puede hablar de ley: es mitad-mitad. Para los cabellos rubios, funciona mejor.* ¿Y todos juntos? *Se puede hablar de ley pero no es muy regular.*"

Se le pide que forme un grupo que tenga una relación nula: construye enseguida (3, 3, 3, 3): "*Se anula. No se puede hablar de ley: 3/6 están en la regla y 3/6 se desvían para los cabellos negros y para los cabellos rubios.*"

Por último se le hace comparar (4, 2, 2, 4) y (3, 3, 1, 5): en primer lugar compara *a* con $(a + b)$ y *d* con $(c + d)$. "¿Pero en el conjunto? *Hay 4/12 que están fuera de la ley y 8/12 que están dentro de la ley. Viene a ser lo mismo. Para el conjunto sería lo mismo.*"

Se ve el gran progreso realizado desde los comienzos del nivel III A. Si Bab comienza a razonar acerca de los ojos azules (*a*) con independencia de los negros (caso *d*) llega a comprender con rapidez (cosa que Vec capta ya de inmediato) que los casos *a* y *d* forman un solo todo favorable a una misma ley, en oposición con los casos *b* y *c*. Por otra parte, subsiste una tendencia más o menos fuerte a razonar acerca de los casos *a* y *b* considerados de modo aislado o *d* y *c* también aisladamente (véase el cálculo de Vec para el conjunto inicial, 5, 1, 2, 4); sin embargo en el

momento que se recurre a la totalidad de los casos posibles, estos sujetos de nivel intermedio llegan a comparar los casos $(a+d)$ sumados a los casos $(b+c)$ o $(a+b+c+d)$, lo que marca el inicio de la idea de correlación en sentido estricto. Lo característico de los sujetos del nivel III B es llegar de entrada y de modo espontáneo a ese cálculo de conjunto.

§ 5. SUBESTADIO III B: RELACION ESPONTANEA ENTRE LOS CASOS FAVORABLES $(a+d)$ Y LOS CASOS DESFAVORABLES $(b+c)$ Y CON EL CONJUNTO DE LOS CASOS POSIBLES

Ya desde la edad de los 10;4 encontramos sujetos excepcionales que reaccionan de acuerdo con el esquema final del nivel III B, pero por lo general es alrededor de los 14-15 años cuando estos casos presentan una frecuencia suficiente como para caracterizar un estadio. Veamos dos ejemplos:

Dan (14 años) clasifica el conjunto (5, 1, 2, 4): "¿Si usted mira los cabellos, puede encontrar el color de los ojos? *Seguro... Hay excepciones, pero son raras: 3 excepciones sobre 9 naturales. En tal caso se dice que no hay una ley absoluta, sino una ley cierta.* ¿Y aquí (3, 0, 0, 3)? *Aquí se trata de una ley absoluta.* ¿Y en este caso (4, 2, 3, 3)? *Las excepciones son raras en relación con el número* (de los casos favorables). ¿Es igual al primer grupo? *No, las excepciones son menos raras: antes eran 3 sobre 9, aquí son 5 sobre 7.*" Se le pide un caso en el que la relación sea nula: forma (1, 1, 1, 1). Luego se le hace comparar (4, 2, 2, 4) y (3, 3, 1, 5): "*Aquí hay más chances de acertar* (segundo grupo). *No, es exactamente lo mismo.*" Por *último* se le pide que forme un grupo en el que se encuentren más irregularidades que en otro: construye entonces una correlación inversa (1, 2, 2, 1) y (1, 1, 1, 3): "*Allá son* 2 (favorables) *y* 4 (desfavorables), *aquí son* 4 (favorables) *y* 2 (desfavorables)."

Cog (15;2). Conjunto (5, 1, 2, 4): "*Las personas que tienen cabellos negros tienen en casi todos los casos ojos negros y casi todas las que tienen cabellos rubios tienen ojos azules.* ¿Cuál es la relación? *No máxima sino débil... 9 personas sobre 12 tienen cabellos que tienden al mismo color* (que los ojos). ¿Y (6, 0, 0, 6)? *Es lo máximo.* ¿Y un grupo en el que no haya relación? *Entonces hay que mezclar* (forma 1, 1, 1, 1). Compare estos dos grupos (4, 2, 2, 4) y (3, 3, 1, 5). *Las relaciones son iguales: existe el mismo número de cartas* (!). ¿Usted las contó? *Sí, en los dos grupos hay 8/12* (favorables) *y 4/12* (desfavorables). ¿Cuál es la buena forma para ver si existe una relación? *Hay que comparar* (*a*) *y* (*d*) *con* (*b*) *y* (*c*) (describe las 4 combinaciones y de ese modo las agrupa en diagonales)."

Se discierne con facilidad en estas reacciones del nivel III B la noción cualitativa de las correlaciones que anunciábamos al comienzo de esta

sección II. En primer lugar, el sujeto reconoce de entrada, después de clasificar por su cuenta las cuatro posibilidades según el esquema $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ (prop. 1), que los casos a $(= p \cdot q)$ y d $(\bar{p} \cdot \bar{q})$ se hallan relacionados entre sí (color de los cabellos que corresponde al de los ojos), pero a través de una relación de reciprocidad y no de identidad (en este caso y como siempre, la reciprocidad es la misma relación pero en negativo: rubio × azul y no rubio × no azul):

4) $\bar{p} \cdot \bar{q} = R(p \cdot q)$

De ahí la siguiente equivalencia (que tampoco significa la identidad sino la correspondencia recíproca necesaria):

5) $(p = q) = (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$

Estas dos prop. (4 y 5) definen así ante el sujeto los caracteres propios de los casos favorables a la ley. En efecto, la prop. (5) enuncia la ley (correspondencia entre p que afirma la presencia de los ojos azules y q la de los cabellos rubios o entre $\bar{p}$ que afirma la presencia de los ojos negros y $\bar{q}$ la de los cabellos negros), mientras que la prop. (4) enuncia la relación que une los dos pares de caracteres que intervienen en la ley.

El sujeto comprende asimismo la reciprocidad entre los casos b $(= p \cdot \bar{q})$ y c $(= \bar{p} \cdot q)$:

6) $\bar{p} \cdot q = R(p \cdot \bar{q})$

De ahí la equivalencia negativa[7] propia de los casos b y c:

7) $(p = \bar{q}) = (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$ o $(p = \bar{q}) = (p \vee\vee q)$ (exclusión recíproca de p y de q).

Pero también el sujeto comprende enseguida que los casos b y c constituyen la inversa de los casos a y d, es decir, el conjunto de los casos desfavorables:

8) $(p = \bar{q}) = (p \vee\vee q) = [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$ por lo tanto $(p \vee\vee q) = N(p = q)$.

En otros términos, una vez que se comprendió la reciprocidad entre los casos favorables a y d (o sea $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$), el sujeto comprende la de los casos desfavorables b y c y la relación de inversión (prop. 8) que existe entre las dos clases caracterizadas de este modo. Así el sujeto del nivel III B razona desde el comienzo en función de las diagonales y busca las relaciones numéricas entre los conjuntos $a + d$, y verifica en-

[7] Se sabe que la equivalencia negativa o exclusión recíproca $(p \vee\vee q)$ también puede escribirse $p = \bar{q}$.

tonces la prop. (4), los conjuntos $(b+c)$ y verifica la prop. (6), y el conjunto de los casos posibles. Ahora bien, en ese sentido la novedad de estos casos nítidos del nivel III B en relación con los casos intermediarios (Bab y Vec en § 4) reside en que, en vez de buscar las relaciones $(a+d)/(a+b+c+d)$ y $(b+c)/(a+b+c+d)$, el sujeto relaciona de modo directo los casos $(a+d)$ con los casos $(b+c)$ para juzgar el grado de correlación existente. Así Dan compara 3 $(b+c)$ con 9 $(a+d)$ y 5 $(b+c)$ con 7 $(a+d)$ para juzgar que la primera correlación es mejor y Cog afirma de modo explícito: "Hay que comparar $(a+d)$ con $(b+c)$." De donde se produce el descubrimiento de los tres casos siguientes (E es el conjunto que verifica las proposiciones consideradas):

9) $E[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] = E[(p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q)]$ = correlación nula

Esto es lo que Dan y Cog comprenden cuando construyen los conjuntos (1, 1, 1, 1), etcétera, juzgados como correspondientes a una relación nula.

10) $E[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] > E[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$ = correlación positiva tanto más fuerte cuanto mayor es la desigualdad

Esto es lo que expresan los sujetos cuando comparan dos distribuciones para juzgar si sus correlaciones respectivas son desiguales o iguales.

11) $E[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})] < E[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$ = correlación negativa

Dan lo percibe al final del interrogatorio.

Como esas diferencias entre los dos conjuntos $E[(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})]$ y $E[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$ siempre se evalúan además en relación con el número total de casos posibles, no es exagerado considerar que estos sujetos utilizan las diversas relaciones en juego en la prop. (3), vale decir, poseen una noción implícita acerca de la correlación.

TERCERA PARTE

LAS ESTRUCTURAS DE CONJUNTO DEL PENSAMIENTO FORMAL

Para estudiar el desarrollo psicológico del pensamiento es posible colocarse en dos puntos de vista distintos pero complementarios: el de las condiciones del equilibrio y el de la construcción de las estructuras. Desde el primer punto de vista, el pensamiento aparece en cada una de sus formas como procediendo desde estados menos equilibrados a estados mejor equilibrados y se trata de detectar las razones de esta mejor o peor equilibración. Ahora bien, existen dos razones principales: una referida a la extensión más o menos grande del campo del equilibrio y la otra a los instrumentos de coordinación, vale decir, precisamente a las estructuras de las que dispone la inteligencia en los niveles considerados. Desde el segundo punto de vista, el problema consiste en determinar la filiación de las estructuras que caracterizan esas coordinaciones así como su modo de construcción. Ahora bien, esta construcción depende de tres factores principales: la maduración del sistema nervioso, la experiencia adquirida en función del medio físico y la acción del medio social; sin embargo estos factores sólo actúan, respectiva y concurrentemente, cuando precisamente se someten a las leyes de equilibrio que determinan las mejores formas de adaptación compatibles con el conjunto de las condiciones en juego. Equilibrio y estructura constituyen, por lo tanto, los dos aspectos complementarios de toda organización del pensamiento.

De los capítulos siguientes se consagrará el primero al examen del pensamiento formal desde el punto de vista del equilibrio y el segundo se colocará en el punto de vista de las estructuras. En cuanto al capítulo 18 será un resumen de lo que sabemos acerca de las diferencias entre el pensamiento del niño, pensamiento preoperatorio o que se limita al empleo de las operaciones concretas, y el pensamiento del adolescente que, gracias al desarrollo del pensamiento formal, se orienta en direcciones desconocidas para el niño.

CAPITULO XVI

EL PENSAMIENTO FORMAL DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL EQUILIBRIO

El carácter principal del pensamiento formal reside sin duda alguna en el papel que le hace desempeñar a lo posible en relación con las comprobaciones reales: comparado con el pensamiento concreto, constituye así una nueva forma de equilibrio que hay que analizar desde la doble perspectiva de la extensión de su campo y los instrumentos de coordinación que operan en su funcionamiento.

§ 1. EL PENSAMIENTO PREOPERATORIO (O INTUITIVO). EL PENSAMIENTO OPERATORIO CONCRETO Y EL PENSAMIENTO FORMAL

I. — Al final del período sensoriomotor, durante el cual la inteligencia consiste exclusivamente en coordinar acciones, la aparición de la función simbólica permite la constitución de las primeras representaciones: de este modo de los 2 a los 7-8 años se elabora una forma original de pensamiento, cuyas manifestaciones se perciben en todas las investigaciones descriptas en esta obra (subestadio I).

Esta forma de pensamiento, de naturaleza preoperatoria, vale decir prelógica,[1] difiere del pensamiento operatorio concreto respecto a los tres

[1] Wallon, quien retomó este punto de vista modificando nuestro vocabulario, habla de pensamiento "precategorial" lo cual significa inepto para manipular los vínculos entre sujeto y predicado. Pero este aspecto del pensamiento preoperatorio no basta para abarcar el conjunto de sus caracteres. Precategorial sigue siendo en efecto algo referido a los vínculos propios de la lógica de las clases y es cierto que el pensamiento preoperatorio no alcanza la denominación de las "agrupaciones" más elementales de esta lógica. Pero tampoco se halla en condiciones de manipular las agrupaciones elementales de la lógica de las relaciones y, por lo tanto, es tanto "prerrelacional" como precategorial. El término preoperatorio presenta la ventaja de abarcar estos dos aspectos al mismo tiempo, y a la vez pone el acento sobre la operación, vale decir, sobre la acción más que sobre el carácter verbal del pensamiento, que por sí solo no podría agotar sus estructuras propias.

puntos siguientes. 1) Cuando se refiere a situaciones estáticas las explica más en función de sus caracteres de configuración actual que en función de las transformaciones que conducen de unas a otras. 2) Cuando se refiere a esas transformaciones, las asimila a las propias acciones del sujeto y no todavía a operaciones reversibles. Estas dos primeras diferencias pueden reducirse a una sola diciendo que los estados y las modificaciones no forman aún, en el nivel del pensamiento intuitivo, un sistema único, mientras que, en el de las operaciones concretas, las situaciones se subordinan a las transformaciones del mismo modo que los resultados de operaciones diversas se subordinan a estas operaciones. 3) Sin embargo, a partir de este nivel existe una tendencia a constituir sistemas de conjunto, y este hecho señala ya una orientación hacia ciertas formas de equilibrio: no obstante, los únicos instrumentos a disposición del sujeto para la constitución de estos sistemas son las regulaciones perceptivas o representativas, en oposición con las operaciones; la diferencia entre estos dos tipos de mecanismos reside en el hecho de que la reversibilidad sigue siendo incompleta en el primer caso y se vuelve completa en el segundo.

La primacía de las situaciones estáticas respecto de las transformaciones aparece poco en los hechos descriptos en esta obra, puesto que los problemas que se les presentaron a los sujetos se refieren sobre todo a transformaciones. Sin embargo todo aquello que examinamos antes acerca de la ausencia de las nociones de conservación previo a los 7-8 años ejemplifica este aspecto del pensamiento preoperatorio. Cuando después de trasvasar una cierta cantidad de líquido a un recipiente más alargado que el inicial, el niño de 4 a 6 años cree que el líquido aumentó porque la forma del recipiente es diferente, simplemente se apoya en la forma perceptiva estática en vez de enfrentar la situación en función de una transformación reversible que mantendría invariable la cantidad en cuestión. En las presentes experiencias vuelve a encontrarse algo semejante a propósito de las cuestiones de equilibrio entre la presión de un peso y la resistencia de un líquido (no conservación de la cantidad de líquido y no conservación de los pesos en juego: cap. X); asimismo, en cuanto a la balanza (cap. XI), los sujetos del nivel I A no saben quitar un peso para restablecer el equilibrio (operación inversa) y se limitan a agregar constantemente pesos de un lado o del otro, según una sucesión irreversible de estados, sin retornar nunca a la situación anterior.

En cambio, la segunda diferencia aparece manifiesta en todos los hechos recopilados en este estudio, en relación con el estadio I: en vez de considerar como un sistema de relaciones causales autónomas al dispositivo experimental que se les presenta, los sujetos del estadio I no establecen diferencia alguna entre los procesos físicos observados y los efectos de sus propias acciones e incluso asimilan las relaciones objetivas a una causalidad copiada de la propia acción (impulso, empuje, etcétera, véase por ejemplo cap. XII, § 1).

Las transformaciones del sistema se asimilan de este modo a la propia acción y las situaciones estáticas se explican por sus caracteres intuitivos de configuración. Por lo tanto no hay homogeneidad entre los dos planos, y los únicos instrumentos de coordinación entre ellos son las regulaciones. En uno de los polos se trata simplemente de regulaciones perceptivas, y es así en los casos en que, para el sujeto, la configuración funciona como una explicación (por ejemplo los comienzos de la igualación de los pesos sobre la balanza son el resultado de una simple simetría perceptiva: cap. XI, § 1). En el otro polo las regulaciones se presentan bajo la forma de correcciones y ajustes inherentes a la propia acción. Estas últimas regulaciones anuncian la operación, al orientar las acciones hacia la reversibilidad: estas regulaciones, sin culminar en compensaciones completas, logran, en efecto, insertar en el interior de un pensamiento que se encuentra casi en su totalidad aún prendido a lo real (realidad perceptiva externa o acciones imaginadas) un pequeño margen de transformaciones virtuales, es decir, un comienzo de "posibilidades" distintas de la "realidad".

II. — En cambio con el pensamiento concreto el sistema de las regulaciones, hasta el momento sin estabilidad, logra una primera forma de equilibrio estable: al alcanzar el nivel de la reversibilidad completa, las operaciones concretas provenientes de las regulaciones anteriores se coordinan, en efecto, en estructuras definidas (clasificaciones, seriaciones, correspondencias, etcétera) que se conservarán durante toda la vida, que no excluirán la formación de sistemas superiores pero que seguirán siendo activas en el plano limitado de la organización de los datos inmediatos. ¿En qué consiste pues esta forma de equilibrio?

En primer lugar los dominios sucesivamente estructurados por este pensamiento concreto ya no suponen la oposición entre las situaciones estáticas y las transformaciones: las primeras se hallan, a partir de entonces, subordinadas a las segundas, en el sentido de que cada estado se concibe como el resultado de una transformación. Por ejemplo, cada situación particular de la balanza (cap. XI) se considera como el resultado de adiciones y sustracciones anteriores de pesos, o bien de igualdades y desigualdades introducidas entre los pesos sobre los dos brazos del dispositivo o también entre las distancias a partir del centro, etcétera.

En segundo lugar, decir que el sistema de las transformaciones se encuentra en equilibrio significa que estas transformaciones adquirieron una forma reversible y el poder de coordinarse mediante leyes fijas de composición: las transformaciones se asimilan por lo tanto, de ahí en adelante, a operaciones, punto de culminación de las acciones interiorizadas del nivel precedente y sus regulaciones intuitivas.

En tercer lugar, el pensamiento operatorio concreto, comparado con el pensamiento preoperatorio o intuitivo, se caracteriza por una extensión de lo real en la dirección de lo virtual. Por ejemplo, clasificar los objetos

significa construir encajes de tal modo que luego puedan relacionarse nuevos objetos con los clasificados actualmente y de tal modo que sean posibles también nuevas inclusiones. Seriar objetos según una fila ordenada supone también nuevas subdivisiones posibles, etcétera. Pero estas "posibilidades" inherentes a las operaciones concretas no se hallan aún desplegadas desde el comienzo en un campo más o menos extenso de hipótesis como sucederá en el caso de las posibilidades formales.

En efecto, el equilibrio que alcanza el pensamiento concreto presenta todavía un campo relativamente restringido y, en consecuencia, permanece inestable en las fronteras de este campo; estas dos circunstancias son precisamente las que, poco a poco, harán necesaria la elaboración del pensamiento formal.

El campo de equilibrio de las operaciones concretas se halla limitado en el siguiente sentido: como todo equilibrio, el que caracteriza a estas operaciones se define por la compensación de los trabajos virtuales compatibles con las relaciones del sistema: ahora bien, estas relaciones se hallan restringidas a la vez por la forma que presentan las operaciones en juego y por el contenido mismo de las nociones a las que se aplican.

Desde el punto de vista de su forma, las operaciones concretas no consisten, en efecto, sino en una estructuración directa de los datos actuales: clasificar, seriar, igualar, establecer correspondencias, etcétera, lo cual equivale a la introducción, dentro de un contenido particular (longitudes, pesos, etcétera), de un conjunto de encajes o relaciones que se limitan a organizar este contenido en su forma actual y real. Lo posible se reduce entonces a una simple prolongación virtual de las acciones u operaciones aplicadas a este contenido dado (por ejemplo, cuando después de seriar algunos objetos, el sujeto sabe que podría continuar con otros objetos, y lo sabe en virtud del mismo esquema anticipatorio de seriación que le permitió efectuar su seriación real).

Por otra parte, desde el punto de vista del contenido, el pensamiento concreto presenta la particularidad limitativa de no ser generalizable de inmediato a todos los contenidos, sino de proceder dominio por dominio, con un desfasaje (*décalage*) que a menudo suma algunos años entre la estructuración de un contenido (por ejemplo, las longitudes) y la del siguiente (por ejemplo, los pesos). Esto equivale a afirmar que es más difícil seriar, igualar, etcétera, objetos calificados por un carácter menos disociable de la propia acción —como el peso— que aplicar las mismas operaciones a un dominio que puede objetivarse con mayor rapidez, como el de las longitudes. Desde este punto de vista del contenido, las "transformaciones virtuales compatibles con las relaciones del sistema" que determinan el margen de las operaciones posibles en oposición con las operaciones reales son pues aún más restringidas que lo que implica la forma de las operaciones en juego. Esta es una segunda razón por la cual lo "posible", que caracteriza a las operaciones concretas, no constituye sino una extensión limitada de lo real.

Por otra parte, además de estas dos clases de limitación del campo de equilibrio de las operaciones concretas, debe señalarse que, si el equilibrio es estable en el interior de este campo, se vuelve inestable en sus fronteras: ello equivale a decir que si cada dominio de estructuración concreta logra formas estables de equilibrio, la inestabilidad reaparece en la coordinación de los dominios. En efecto, no existe composición concreta general porque después de clasificar, seriar, etcétera, a un conjunto de contenidos, o después de establecer correspondencias entre seriaciones referidas a dos o a varios dominios distintos, el pensamiento concreto no logra resolver todos los problemas planteados ya sea por la interferencia de operaciones heterogéneas, o bien por la intersección de los dominios como tales. Sucede así que desde el punto de vista concreto, la comparación de un peso y un desplazamiento en altura basta para determinar en algunos casos un "trabajo" (más pesado $\times$ más alto $=$ más trabajo) pero, en otros casos, la composición sigue siendo indeterminada y aliotransitiva (más pesado $\times$ menos alto $=$ más o menos trabajo, o el mismo trabajo).

En resumen, el pensamiento concreto continúa esencialmente adherido a lo real y el sistema de las operaciones concretas, que constituye la forma final de equilibrio del pensamiento intuitivo, sólo alcanza un conjunto restringido de transformaciones virtuales, por lo tanto, una noción de lo "posible" que simplemente prolonga (y por poco) a lo real. Ese carácter del pensamiento concreto resulta particularmente claro en las presentes investigaciones, donde puede compararse en cada punto el pensamiento concreto del niño con el pensamiento formal del preadolescente o del adolescente: mientras que estos últimos, para resolver el problema que se les plantea, comienzan de entrada con la construcción de un conjunto de hipótesis entre las que deberán elegir la adecuada en la experiencia, el niño del nivel concreto no formula, en sentido estricto, hipótesis alguna: entra en acción desde el comienzo y simplemente busca, durante su acción, coordinar las lecturas sucesivas de los resultados que obtiene, lo que equivale a estructurar la realidad sobre la que actúa. Si se conviene en admitir que éstas son hipótesis, es necesario entonces precisar que no son sino el esbozo de los proyectos de acciones posibles y no son, como sucede para el adolescente, una concepción de lo que debería ser lo real si tal o cual condición hipotética se cumpliera.

III. — Por último, con el pensamiento formal se opera una inversión de sentido entre lo real y lo posible. Lo posible en vez de manifestarse simplemente bajo la forma de una prolongación de lo real o de las acciones ejecutadas sobre la realidad, subordina por el contrario a lo real: a partir de entonces se concibe a los hechos como el sector de las realizaciones efectivas en el interior de un universo de transformaciones posibles, ya que sólo se los explica e incluso sólo se los admite como hechos después de una verificación que se refiere al conjunto de las hipótesis posibles compatibles con la situación dada.

En efecto, el pensamiento formal es esencialmente hipotético-deductivo: la deducción ya no se refiere de modo directo a las realidades percibidas, sino a enunciados hipotéticos, es decir, a proposiciones que formulan las hipótesis o plantean los datos a título de simples datos, independientemente de su carácter actual: la deducción consiste entonces en vincular entre sí esas presuposiciones extrayendo sus consecuencias necesarias incluso cuando su verdad experimental no vaya más allá de lo posible. Esta inversión de sentido entre lo posible y lo real, más que cualquier otra propiedad subsecuente, es la que caracteriza al pensamiento formal: en vez de introducir sin más un comienzo de necesidad en lo real, como sucede en el caso de las inferencias concretas,[2] ese pensamiento formal efectúa desde el comienzo la síntesis entre lo posible y lo necesario, y deduce con rigor las conclusiones a partir de premisas cuya verdad sólo se admite en primer lugar como hipotética y de este modo opera en el dominio de lo posible antes de reunirse con lo real.

Sin embargo, ¿podría caracterizarse quizás al pensamiento formal con propiedades más simples que el recurso a la hipótesis o a lo posible? Su propiedad más aparente es su referencia a elementos verbales y ya no directamente a objetos, y en primer lugar antes sólo buscamos establecer su oposición con el pensamiento concreto a partir de este único factor. En efecto, a menudo basta traducir en simples proposiciones una operación concreta, sin presentarle al sujeto objetos manipulables que sirvan de punto de apoyo a esta operación, para que sólo se torne accesible en el nivel formal. Así en el problema verbal "Edith es más rubia que Susana y Edith es más morena que Lili; ¿cuál tiene el cabello más oscuro?" pareciera que no interviene otra cosa sino una coordinación de relaciones "más x" y "menos x" como en toda seriación de relaciones asimétricas transitivas. Ahora bien a partir de los 7 años, el niño sabe seriar pequeñas reglas en función de sus longitudes colocando cada vez y de modo sucesivo la regla más pequeña de todas las que quedan: de este modo, para un elemento E, coordina las dos relaciones $E > D$, C, B, A (ya colocadas) $E < F$, G, H, etcétera (elementos restantes), por lo tanto, las dos relaciones "más x" y "menos x". Pero la cuestión verbal de los colores sólo se resuelve a los 11-12 años, y sin embargo la seriación concreta de los colores no es más difícil que la de las longitudes. Con esto no lo hemos dicho todo, ya que no todo pensamiento verbal es formal y se pueden obtener razonamientos correctos referidos a simples enunciados a partir del nivel de los 7-8 años, con tal que estos enunciados correspondan a representaciones bastante concretas. Entonces, aun cuando en su contenido el test de los tres colores parezca no implicar nada sino operaciones de seriación, el solo hecho de que sea necesario esperar algunos años para que este problema se resuelva mediante palabras, después de habérselo resuelto en presencia de los objetos, indica que interviene algo

[2] Fundadas sobre la transitividad de las inclusiones de clases o relaciones.

más. En efecto, el examen de las imágenes mentales muestra hasta qué punto la representación concreta resulta en este caso incómoda para la lectura de los datos (por causa de las relaciones cruzadas). Resulta entonces que el sujeto que no consigue traducir los datos en representaciones imaginadas, se encuentra obligado a asumirlas a título de simples hipótesis para extraer de ellas las consecuencias necesarias: esta conexión entre lo posible y lo necesario vuelve entonces indispensable la inserción de las operaciones de seriaciones en un juego de implicaciones que sirvan como forma interproposicional al contenido intraproposicional constituido por las relaciones a seriar.

En efecto, al sustituir objetos con enunciados verbales a la lógica de clases y relaciones que afectan a los objetos, se le superpone una nueva lógica: la lógica de las proposiciones. Esta es una segunda propiedad fundamental del pensamiento formal. Pero esta lógica de las proposiciones supone un número muy superior de posibilidades operatorias que las simples agrupaciones de clases y relaciones. Por lo tanto, en primer lugar y funcionalmente la cantidad de operaciones posibles es lo que lo distingue del pensamiento concreto, con independencia de los problemas de estructuras operatorias sobre las que volveremos más adelante. La prueba de ello es que la lógica de las proposiciones se manifiesta bajo sus formas más características tanto en presencia de dispositivos experimentales, como los que se describieron y utilizaron en esta obra, como ante problemas puramente verbales. En este caso, en vez de remitir el razonamiento a datos ya formulados en su totalidad, se impulsa por el contrario al sujeto a plantearse sus propios problemas y a elaborar sus propios métodos. Entonces uno se da cuenta de que el papel del pensamiento formal no se reduce en absoluto a la traducción mediante palabras o proposiciones de aquello que podría haberse ejecutado concretamente sin su socorro: por el contrario, durante las manipulaciones experimentales mismas es cuando uno ve afirmarse, en los comienzos del nivel del pensamiento formal, una serie de nuevas posibilidades operatorias: disyunciones, implicaciones, exclusiones, etcétera, que intervienen desde la organización de la experiencia y desde la lectura de los datos fácticos, y se superponen en ese terreno mismo a las simples agrupaciones de clases y relaciones. De nuevo la razón de esto reside en que, desde el contacto con los problemas fácticos, el pensamiento formal parte de la hipótesis, vale decir, de lo posible, en vez de atenerse a una estructuración directa de los datos percibidos. Lo característico de la lógica de las proposiciones, a pesar de las apariencias y de la opinión corriente, no reside en el hecho de ser una lógica verbal: se trata ante todo de una lógica de todas las combinaciones posibles del pensamiento, ya surjan éstas a propósito de problemas experimentales o a propósito de cuestiones puramente verbales. Sin duda alguna, estas combinaciones que se sobreañaden, gracias a las hipótesis, a la simple lectura de los datos, suponen un soporte verbal interior; pero este soporte no constituye el motor efectivo de la lógica de las proposiciones. Este motor

es el poder de combinar, gracias al cual inserta en lo real al conjunto de las hipótesis posibles compatibles con los datos.

Un tercer carácter del pensamiento formal, por el cual antes intentamos definirlo después de comprobar la insuficiencia del criterio puramente verbal, es que constituye un sistema de operaciones a la segunda potencia. Las operaciones concretas son operaciones a la primera potencia en el sentido de que se refieren directamente a los objetos: por ejemplo la construcción de las relaciones entre elementos dados. Pero resulta posible también construir relaciones entre relaciones y esas relaciones de relaciones serán, por ejemplo, proporciones (la experiencia muestra en efecto que la conquista de las proporciones sólo se alcanza en el nivel formal). En ese sentido, las proporciones suponen operaciones a la segunda potencia y puede decirse lo mismo acerca de la lógica de las proposiciones puesto que las operaciones interproposicionales se refieren a enunciados cuyo contenido intraproposicional consiste en operaciones de clases y relaciones. Pero resulta claro que esta noción de operación a la segunda potencia expresa de nuevo el carácter general del pensamiento formal que consiste en ir más allá del cuadro de las transformaciones que se refieran de modo directo a lo real (operaciones a la primera potencia) subordinándolas a un sistema de combinaciones hipotético-deductivas, por lo tanto, simplemente posibles.

La propiedad más general, a la que debería recurrirse para caracterizar al pensamiento formal, ¿no es acaso la propiedad de constituir una combinatoria propiamente dicha? En efecto, más restringida en apariencia que las precedentes, esta propiedad las recubre a todas y presenta así una mayor generalidad que ellas. Como ya acabamos de verlo, la lógica de las proposiciones tiene como característica principal, no la de ser una lógica verbal sino el suponer necesariamente una combinatoria. Por otra parte, las operaciones de combinación son precisamente operaciones a la segunda potencia: las permutaciones son seriaciones de seriaciones; las combinaciones, multiplicaciones de multiplicaciones, etcétera. De este modo no aparecen en realidad sino en el nivel formal, tanto en la forma de operaciones matemáticas explícitas [3] como en la forma implícita que revisten en nuestras presentes investigaciones (cap. VII, etcétera). Sin embargo la oposición entre las operaciones combinatorias y las operaciones no combinatorias a su vez depende de la diferencia entre lo posible y lo real: únicamente una combinatoria proporciona el conjunto de los posibles y, en el terreno experimental, la búsqueda de las nuevas combinaciones constituye precisamente lo que caracteriza a la hipótesis. Por más general que sea, el carácter combinatorio del pensamiento formal se subordina entonces a una propiedad más general aún: la subordinación de lo real a lo posible.

En efecto, la inversión de sentido entre lo real y lo posible consti-

[3] Véase *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, III parte.

tuye el carácter funcional más fundamental del pensamiento formal, con independencia de las consecuencias estructurales que esta inversión supone. Por lo tanto, debemos partir de esa diferencia esencial entre lo concreto y lo formal para explicar la forma de equilibrio propia de esta última meseta del desarrollo del pensamiento.

§ 2. LO REAL Y LO POSIBLE EN EL PENSAMIENTO FORMAL

Acabamos de comprobar (en II) que el pensamiento concreto constituye la forma de equilibrio hacia la que tiende el pensamiento preoperatorio: las situaciones estáticas y las transformaciones se reúnen entonces en un solo sistema de tal modo que las primeras se subordinan a las segundas y de tal modo que las segundas forman entre sí una estructura operatoria que logra la reversibilidad por compensación de las transformaciones en juego. Pero hemos visto también que el campo de este equilibrio es aún restringido, tanto por la forma de las operaciones como por la resistencia del contenido: a falta de instrumentos de coordinación general entre las agrupaciones operatorias concretas, lo posible sólo se concibe aún como la prolongación directa de lo real. Con los instrumentos más complejos de coordinación propios del pensamiento formal, aparece una nueva forma de equilibrio que engloba a todos los dominios parciales característicos del pensamiento concreto y que los coordina en un sistema general cuyos vínculos constituirán al mismo tiempo a esas operaciones a la segunda potencia y a esa combinatoria mediante las cuales la lógica de las proposiciones logrará situar lo real en un conjunto de transformaciones posibles. Pero para comprender la naturaleza de este nuevo proceso de equilibración resulta importante precisar antes la significación de lo posible y lo real en el interior del pensamiento formal.

I. — En efecto, el dominio de lo posible que el pensamiento formal alcanza, no es en absoluto el dominio de lo arbitrario o la imaginación libre de toda regla y objetividad. Muy por el contrario, ese advenimiento de lo posible debe enfocarse bajo la doble perspectiva física y lógica como la condición indispensable del logro de una forma más general de equilibrio y como la condición no menos indispensable de la constitución de las conexiones necesarias utilizadas por el pensamiento.

I A) En efecto, desde el punto de vista físico, sabemos que un estado de equilibrio se caracteriza por la compensación entre todas las modificaciones virtuales compatibles con los vínculos del sistema en juego. Para la física experimental misma, vale decir para la ciencia que se refiere a la realidad bajo su aspecto más material, la noción de lo posible aparece pues como desempeñando un papel positivo esencial en la determinación de las condiciones de un estado de equilibrio. En la medida en que la psicología siente también la necesidad de considerar estados de equilibrio, resulta

pues indispensable *a fortiori* recurrir a la noción de lo posible, entendida como noción de las acciones o transformaciones mentales "virtuales" (en el sentido en que el físico habla de velocidades o trabajos "virtuales"). Ahora bien, si el concepto de equilibrio ya desempeña un papel no sin importancia en la teoría de las percepciones, como lo mostró la teoría de la Gestalt, su empleo es tanto más indicado en el dominio de las operaciones intelectuales en la medida en que, una vez constituido, un sistema operatorio puede conservarse invariable durante toda la existencia ulterior de un individuo. Decir que, en el nivel formal, el sujeto subordina lo real a lo posible equivale pues a afirmar algo preciso y que tiene una relación directa con la teoría de los estados de equilibrio. En primer lugar, equivale a decir que, ante una situación determinada, el sujeto no se limita a tener en cuenta sólo aquellas relaciones entre los elementos dados, que aparentemente se le imponen, sino que, para evitar que poco después nuevos hechos lo contradigan, busca desde el comienzo englobar esas relaciones en apariencia reales dentro del conjunto de las relaciones concebidas por él como posibles. En otros términos, para equilibrar sus afirmaciones sucesivas (lo cual equivale a evitar que hechos ulteriores lo contradigan), el sujeto tiende por sí mismo a insertar los vínculos supuestos en primer lugar como reales dentro del conjunto de los que reconoce como posibles, de manera que luego pueda elegir los verdaderos mediante el examen de ciertas transformaciones efectuadas precisamente en el interior de esas relaciones posibles. La intervención de lo posible, resulta entonces, desde la actitud inicial espontánea de los sujetos del nivel formal y colocándose desde su punto de vista subjetivo, la condición misma del equilibrio de su pensamiento.

Pero enseguida se le suma el siguiente hecho, considerado esta vez desde el punto de vista del observador y ya no del sujeto. Para concebir, en una situación determinada, al conjunto de los vínculos o las transformaciones posibles, el sujeto se ve obligado a deducirlos mediante operaciones lógicas adecuadas: ahora bien, el conjunto de esas operaciones, de las que sólo se utiliza una parte ante una situación o un problema particulares, constituye todavía, desde la perspectiva física del equilibrio en la que nos hemos colocado por el momento, un sistema de transformaciones virtuales; en efecto, por el momento sólo son "reales" aquellas operaciones que intervienen efectivamente en la situación considerada, mientras que las otras transformaciones simplemente permanecen a disposición. Pero estas operaciones (o transformaciones lógicas) virtuales no por ello resultan menos necesarias para el equilibrio funcional de las operaciones actuales o reales, puesto que, por una parte, aseguran su reversibilidad y que, por la otra, permiten desarrollarlas al paso de las necesidades en la conquista de nuevas vinculaciones posibles.

En resumen, para concebir a lo posible, el pensamiento formal se encuentra obligado a tener a su disposición, en cada situación particular, una variación extensa de operaciones virtuales, que van más allá del dominio de

las operaciones de hecho momentáneamente empleadas, y esas operaciones virtuales constituyen una condición necesaria para el equilibrio por dos razones simultáneas: por una parte, ellas son las que corresponden a las llamadas "transformaciones virtuales" en el lenguaje de la teoría del equilibrio y, por la otra, sólo existe equilibrio en la medida en que esas transformaciones virtuales "se compensan" exactamente, vale decir, en el lenguaje de las operaciones, en la medida en que esas operaciones posibles constituyen un sistema rigurosamente reversible desde el punto de vista lógico.

I B) Todo esto nos conduce a la segunda significación de la intervención de lo posible: la significación lógica, que nuevamente va a mostrarnos y según una segunda perspectiva, el carácter indispensable de esta intervención para el funcionamiento del pensamiento hipotético-deductivo o formal. En efecto, desde el punto de vista lógico lo posible formal constituye el correlato obligatorio de la noción de necesidad. Una afirmación sólo referida a lo real, como por ejemplo un juicio de existencia o un juicio predicativo no podría ser necesaria: es verdadera o falsa, en tanto corresponde o no corresponde a un dato fáctico. Por el contrario, una deducción que se refiere a una hipótesis (o a un dato fáctico pero admitido a título de hipótesis) si es correcta es necesariamente verdadera desde el punto de vista formal y con independencia del valor de la hipótesis admitida. La conexión marcada por las palabras "si ... entonces" (implicación inferencial) consiste de este modo en relacionar una consecuencia necesaria con una afirmación simplemente posible: esta síntesis entre lo necesario y lo posible caracteriza al empleo de ese posible en el pensamiento formal, en oposición a la posible extensión-de-lo-real del pensamiento concreto y a las posibilidades no reguladas propias de las ficciones de la imaginación. Ahora bien, ¿en qué consiste ese posible formal? Es posible todo aquello que no es contradictorio. Pero lo no contradictorio es, en sentido estricto, el conjunto de las transformaciones reversibles tal que la composición de una operación y su inversa desemboque en un producto llamado "idéntico" o nulo: $p \cdot \bar{p} = 0$. De este modo la reversibilidad operatoria formal que, desde la perspectiva física precedente, significaba la exacta compensación de las transformaciones (u operaciones) virtuales, adquiere, desde la presente perspectiva lógica, la significación de la necesidad deductiva.

Estos dos aspectos de la noción de lo posible —el físico y el lógico— constituyen en realidad desde el punto de vista psicológico sólo un aspecto: al situar un estado real en un sistema de transformaciones posibles, el pensamiento formal asegura simultáneamente su equilibrio, desde el punto de vista de la conservación psicológica ulterior de las estructuras que elabora, y su valor de instrumento lógico necesario desde el punto de vista de la utilización de esas estructuras como instrumentos deductivos. El equilibrio mental se halla determinado por una estructura de conjunto de las operaciones, la noción de lo posible desempeñará así al mismo tiempo el papel de factor de equilibrio y factor lógico, según que uno se coloque desde el punto de vista de la explicación —que es en particular el del psicólogo— o desde

el punto de vista de la comprensión —que es en particular el del sujeto—. Por ello la inversión de sentido entre lo real y lo posible que marca el advenimiento del pensamiento formal representa una circunstancia fundamental para el desarrollo de la inteligencia, en la medida en que ella constituye una organización que tiende hacia un estado de equilibrio a la vez móvil y estable.

II. — Pero ahora tenemos que dar un paso más adelante, ya que el equilibrio psicológico no puede asimilarse en su totalidad a un equilibrio físico. La comparación entre la explicación física y la explicación psicológica del estado de equilibrio resulta entonces instructiva por sus diferencias o sus oposiciones como por sus aspectos comunes.

Desde el punto de vista físico, un sistema como, por ejemplo, una balanza, se encuentra en equilibrio cuando el conjunto de los trabajos virtuales (aumentos de los pesos de un lado o del otro de la balanza expresados en desplazamientos angulares) se compensan enteramente. Desde el punto de vista de lo real y admitiendo que la balanza esté inmóvil: no se efectúa entonces de modo efectivo y actual trabajo alguno. En cambio, desde el punto de vista de lo posible la balanza podría desplazarse en un sentido y aparecería una fuerza que actuaría en sentido inverso y restablecería el equilibrio: pero, mientras esas transformaciones no se presenten de hecho, estos "trabajos virtuales" que señalan, en la teoría del equilibrio, la intervención de lo posible, sólo existen en sentido estricto en la mente del físico. En efecto, *si se quiere desempeñan un papel en lo real, pero un papel esencialmente* negativo: explican que nada cambia si nada se modifica desde fuera del sistema. Es necesario pues distinguir, en un estado de equilibrio físico, por un lado, una "realidad" causal y temporal, y por el otro un conjunto de "posibilidad" deductivo, extemporáneo y situado en la mente del físico que construye la teoría de lo real.

Desde el punto de vista psicológico, un sistema en equilibrio, como por ejemplo el conjunto de las relaciones comprendidas por un sujeto que consiguió explicarse el mecanismo de la balanza, supone también dos aspectos, uno relativo a lo real y el otro a lo posible. En efecto, por una parte, el sujeto efectuó realmente algunas operaciones mentales y construyó algunas relaciones que ahora aplica al objeto que tiene ante sí: por ejemplo, el sujeto afirma, porque así lo percibe y concibe, que la balanza es horizontal y que un peso de 2 kg, a una distancia de 10 cm del eje compensa un peso de 1 kg a 20 cm del eje situado sobre el otro brazo. Pero estas operaciones y relaciones reales, vale decir, utilizadas de manera actual, no bastan para dar cuenta del equilibrio conseguido mediante el acto de comprensión, puesto que en éste interviene un conjunto de operaciones y relaciones posibles o virtuales. Pero la línea de demarcación entre lo posible y lo real es mucho *más difícil de trazar en el terreno psicológico que en el terreno físico*, y precisamente esta diferencia entre las dos formas de equilibrio resulta instructiva para el estudio del pensamiento formal y se trata entonces de analizarlo un poco profundamente.

Ante todo deben distinguirse con cuidado las dos significaciones que supone desde el punto de vista psicológico la palabra posible. En primer lugar, puede hablarse de operaciones y relaciones posibles para designar las que el sujeto concibe como posibles, vale decir, las que él sabe que puede efectuar o construir, incluso sin que lo haga efectivamente: hablaremos entonces de *lo materialmente posible* y de entrada se reconoce lo que anteriormente caracterizamos como lo posible desde el punto de vista del sujeto. También se podría atribuir el calificativo de posibles a las operaciones y relaciones que el sujeto podría efectuar o construir, pero sin que piense en hacerlo, vale decir, sin que tome conciencia de esa eventualidad ni siquiera de su propia capacidad en este sentido: hablaremos entonces de *lo estructuralmente posible*, que consiste pues en lo posible desde el punto de vista del observador.

Tomemos de nuevo nuestro ejemplo para el examen de lo "materialmente posible". Al mismo tiempo que comprueba la compensación entre un peso de 2 kg a 10 cm y un peso de 1 kg a 20 cm del eje, el sujeto puede imaginar, sin por ello entregarse a acciones materiales, que desplaza en 5 cm el peso de 2 kg hacia afuera y en 10 cm el peso de 1 kg también hacia afuera: por más que de este modo no vaya más allá del dominio de las acciones virtuales (en realidad no desplaza nada), no obstante el sujeto deducirá que estos dos desplazamientos hipotéticos conservarán el equilibrio inicial, porque la proporción inversa de los pesos y las distancias seguirá siendo la misma, etc. Volviendo a lo real podrá verificarlo; también podrá evitar hacerlo, puesto que deductivamente está seguro en cuanto al resultado. Pero en ambos casos, estas acciones posibles lo ayudarán a comprender, e incluso le serán indispensables para comprender los datos reales (horizontalidad de la balanza para 2 kg a 10 cm y 1 kg a 20 cm): interpretará así las relaciones reales en función de un conjunto de acciones virtuales y las explicará como una consecuencia necesaria de estas operaciones o relaciones posibles combinadas entre sí.

Pero enseguida vemos que estas operaciones o relaciones "materialmente posibles" son tan reales, desde el punto de vista psicológico, como las operaciones o relaciones "reales" de partida. Unicamente desde el punto de vista del sujeto se trata de posibilidades. Dicho de otro modo, el sujeto distingue lo físicamente actual y las transformaciones que podría introducir en el sistema percibido: ahora bien, al mismo tiempo que sólo se apoyan en acciones virtuales, el sujeto piensa en estas transformaciones posibles y, de este modo, son desde el punto de vista psicológico representaciones u operaciones reales. Lo "materialmente posible" no constituye pues sino una modalidad del pensamiento real del sujeto. Esta modalidad es la que adquiere una importancia particular en el nivel del pensamiento formal y la que se subordina por ello a la modalidad de lo "real". Sin embargo al mismo tiempo que contribuye a estabilizar el equilibrio de las operaciones en la medida en que las transformaciones efectivamente realizadas se hallan de este modo condicionadas por las transformaciones que el sujeto concibe como posibles,

ese dominio de lo "materialmente posible" no representa el equivalente total, en el terreno psicológico, de las transformaciones virtuales en la teoría del equilibrio físico: más precisamente, él no corresponde a nada en el terreno físico, puesto que se trata de un intermediario entre lo puro real (relaciones actuales) y lo puro posible (lo "estructuralmente posible"), mientras que desde el punto de vista físico no interviene *tertium* alguno entre lo actual y lo virtual.

Sucede algo muy distinto con lo "estructuralmente posible" que por el contrario equivale plenamente en el plano del equilibrio psicológico a lo que son las "transformaciones virtuales" en un sistema físico equilibrado. Junto a las operaciones que realmente ejecutó (ya sea a propósito de acciones o percepciones efectivas, o bien a propósito de simples hipótesis "materialmente posibles"), el sujeto podría haber efectuado otras, y no lo hizo, ni en su acción ni en su pensamiento: en vez de imaginar un desplazamiento de 5 y 10 cm para los pesos de 2 y 1 kg hubiera podido modificar a los mismos pesos (en acto o en pensamiento), o bien hubiera podido disminuir una distancia de un lado y un peso proporcional del otro, etc. Sucede incluso que el sujeto, sin hacer referencia de modo explícito al esquema operatorio de las proporciones, se conduce como si lo utilizase: una misma pregunta, que en otro sujeto no desencadenaría toma de conciencia alguna por la ausencia de una estructura subyacente, constituirá entonces para él el punto de partida para una estructuración inmediata de nuevas relaciones bien formuladas. Estas observaciones, que son comunes, proporcionarán entonces la prueba, pero una prueba *a posteriori*, de que una operación determinada era "estructuralmente posible" para un sujeto mientras que no lo era para otros. En resumen, en un acto de inteligencia, siempre hay que considerar las operaciones reales, en el sentido de actualmente utilizadas en el pensamiento consciente del sujeto, y las operaciones "estructuralmente posibles", vale decir, las que no realiza pero que podría realizar. Como se vio más arriba (I A), este posible, referido a las estructuras operatorias que están a disposición del sujeto, es lo que constituye lo posible desde el punto de vista del observador y que, por lo tanto, corresponde en el terreno físico a las transformaciones virtuales, no actualmente realizadas.

Ahora bien, para constituir la teoría de los mecanismos psicológicos del equilibrio operatorio, hay que considerar a las dos significaciones distintas de la noción de lo posible, por más que estemos en presencia de tres planos (lo real, lo materialmente posible y lo estructuralmente posible) y no de dos como en el terreno físico (lo real y lo virtual). En efecto, lo materialmente posible mantiene estrechas relaciones con lo estructuralmente posible, de lo que constituye como una primera meseta de actualización: en la medida en que el sujeto dispone de un número suficiente de operaciones estructuralmente posibles logra imaginar transformaciones materialmente posibles. Sin un cierto juego de posibilidades estructurales (y es lo que claramente se manifiesta en el nivel preoperatorio e incluso en el de las operaciones concretas), sólo podría comprobar los estados fácticos percibidos en lo real, los

estados estáticos o las transformaciones actuales y no lograría representarse las transformaciones hipotéticas que le sirven para imaginar nuevas experiencias. Por lo tanto lo materialmente posible depende de lo estructuralmente posible; pero lo primero es más pobre que lo segundo y por ello, aunque a cada instante derive de él, deben distinguirse con cuidado las dos variedades ya que la segunda tiene una importancia mucho mayor, tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico.

De este modo, podemos volver a considerar la comparación entre la noción física y la noción psicológica del equilibrio. Desde el punto de vista físico, sólo lo real presenta un carácter causal, puesto que lo virtual o posible no desempeña papel positivo alguno salvo en la mente del físico: en otros términos, lo posible no es sino un instrumento de deducción o cálculo mientras que la causalidad es exclusivamente real. Ahora bien, la situación es muy diferente en el caso de un equilibrio operatorio, puesto que en este dominio, ambos, lo real y lo posible son de orden psicológico, vale decir, ambos se hallan situados en la mente del sujeto, e interfieren causalmente entre sí en el interior de los mecanismos constitutivos de la vida mental de ese sujeto. Podría sostenerse por cierto que sólo lo real y lo "materialmente posible" (que es por lo tanto todavía algo psicológicamente real) intervienen en la mente del sujeto, mientras que lo "estructuralmente posible" sería una noción referida no al sujeto mismo, sino al psicólogo que busca analizar y explicar al sujeto. De este modo, existiría un paralelismo completo entre el punto de vista físico y el punto de vista psicológico. Pero, en la medida en que lo "materialmente posible" se halla condicionado por lo "estructuralmente posible" —y todas las investigaciones descriptas en esta obra conducen a este mismo resultado— se excluye la no atribución de lo posible estructural al sujeto en tanto tal.

Pero entonces nos vemos conducidos a la siguiente consecuencia paradójica: en un estado de equilibrio psicológico, lo posible (estructural como materialmente) desempeña un papel causal tanto como las operaciones reales. Incluso puede sostenerse que la vida mental en su totalidad se halla dominada por esa especie de causalidad de lo posible.

II A) En lo que se refiere a lo "materialmente posible", esta afirmación no ofrece por otra parte nada sorprendente y corresponde a ese hecho admitido por todo el mundo de que la "hipótesis" desempeña un papel en el funcionamiento del pensamiento: la función causal de lo materialmente posible; en efecto, es la conducta de la hipótesis la que le permite al sujeto ir más allá de lo que percibe o concibe, con una creencia en lo real, para comprometerse en la dirección de lo que puede concebirse sin decisión actual en cuanto a la verificación. Desde los tanteos y transferencias sensorio-motrices hasta la hipótesis experimental del tipo más elevado, la adaptación a lo real actual se dobla así con una adaptación progresiva a lo real futuro. Lo posible entra pues bajo la forma del futuro eventual en el campo de las adaptaciones indispensables a la acción; luego, cuando la acción interiorizada se convierte en operación, lo posible propiamente dicho inter-

viene en cada bifurcación, vale decir, en todas partes donde es necesario elegir entre dos o varios caminos después de haberlos imaginado o probado. Por último, en el nivel formal, la hipótesis interviene desde el contacto con lo real, en la medida en que el hecho actual se concibe como el que puede dar lugar a varias interpretaciones.

Pero esta causalidad de lo "materialmente posible" nada tiene de misterioso puesto que pensar como contenido de pensamiento un acontecimiento posible es, repitámoslo, efectuar una o varias operaciones reales.

II B) La causalidad eventual vinculada con lo "estructuralmente posible" plantea en cambio un problema muy diferente y, por otra parte, mucho más importante: ¿cómo las operaciones a las que el sujeto no recurre, o no recurre de modo consciente, y que siguen siendo virtuales a veces hasta el grado de no haber pertenecido nunca bajo una forma explícita al dominio de los conocimientos efectivos de ese sujeto pueden influir causalmente sobre las operaciones realmente efectuadas?

En primer lugar, señalemos que semejante problema no corresponde especialmente a la psicología de las operaciones lógicas, ni siquiera a la psicología en general. En embriología causal ya se distinguen "potencialidades" (parciales o totales), cuya aparición se halla vinculada con un nivel determinado del desarrollo, y de las que se realizan efectivamente sólo algunas: resulta entonces difícil admitir que esas realizaciones limitadas son independientes del sistema entero de las "potencialidades" del cual hacen pasar una parte de lo posible a lo real. Según la hipótesis psicológica de un desarrollo de las funciones mentales vinculado con la maduración del sistema nervioso (hipótesis que constituye una simple prolongación del punto de vista embriológico precedente), resulta claro que una coordinación puede a la vez aparecer bajo una forma virtualmente general y no provocar, en primer lugar, sino ciertas aplicaciones particulares: estas últimas, aunque sean las únicas reales, dependen entonces del sistema de las coordinaciones posibles aparecidas con el título de posibilidades innatas con maduración más o menos tardía.

Sin vincularnos con estas hipótesis, simplemente damos cuenta del hecho de que la causalidad de lo posible se invoca de modo implícito mucho más a menudo de lo que se cree en el terreno mental e incluso en el terreno biológico en general. Ahora bien, en lo que se refiere a nuestro problema actual, se encuentra un testimonio de esta causalidad en la frecuencia de ciertos sincronismos que —parece ser— serían inexplicables si una o varias estructuras operatorias de conjunto no se constituyeran en un momento dado con el título de fuente o reservorio de operaciones posibles: de ellas sólo algunas se realizan, pero se realizan entonces en función del sistema total y, en consecuencia, tanto en función de lo virtual como de lo actual.

Desde el nivel de las operaciones concretas, se observa continuamente ese hecho sorprendente: los sujetos que pertenecen a un mismo nivel, sin percibir el parentesco entre dos problemas análogos desde el punto de vista

objetivo y sin saber que les aplican estructuras operatorias semejantes, reaccionan en promedio sincrónicamente de la misma manera a estos dos problemas. Por ejemplo, si se comparan las reacciones de los sujetos del nivel II B enfrentados con el problema de los pesos y las distancias sobre la balanza (cap. 11) y con el problema del equilibrio de un pequeño vagón sobre un plano inclinado (cap. 12) se comprueba que a los 9-10 años estos sujetos comienzan por establecer una correspondencia inversa entre los pesos y las distancias (a partir del centro) en el primer caso, y en el segundo comprenden que cuanto más inclinado está el riel más pesa el vagón. Ahora bien, en el segundo caso hacen intervenir la noción de trabajo mientras que en el primer caso no tienen noción alguna de ella; no obstante, se comprueba que el establecimiento de la relación de los pesos con las distancias a partir del centro, o con las alturas, es el mismo en ambos casos: en ambas situaciones el niño comprende que la fuerza ejercida por el peso cambia en función de las relaciones espaciales. Asimismo los establecimientos de relaciones entre peso y volumen aparecen, en los mismos niveles, ante los problemas más diversos sin que el sujeto recurra de modo explícito a ciertas analogías. En el nivel concreto, podrían obtenerse muchos más ejemplos del mismo orden.

En el nivel formal la sincronización de las mismas reacciones ante problemas análogos es aun mucho más sorprendente, ya que contrariamente a lo que se produce todavía en el nivel precedente, la forma operatoria se disocia entonces en su totalidad del contenido del pensamiento. Además de la posibilidad de razonar formalmente, vale decir, mediante implicaciones, exclusiones, disyunciones, etc., aparecen a las mismas edades las nociones de proporciones y, sobre todo, las consideraciones combinatorias [4] en los dominios más diversos, como si el sistema de las operaciones posibles constituyera un reticulado en el interior del cual, una vez atrapado, un contenido de pensamiento se difundiera inmediatamente en todas las direcciones a la vez. La causalidad de lo posible se manifiesta entonces en forma de una especie de acción de los esquemas implícitos sobre las operaciones explícitas, estando éstas determinadas no sólo por los actos de pensamiento realmente ejecutados en los momentos anteriores a la nueva operación, sino por la totalidad del campo operatorio constituido por las operaciones posibles.

Por cierto, nada más peligroso que recurrir a lo implícito, vale decir a lo virtual. Pero existen garantías que permiten disociar el uso abusivo de lo virtual (como por ejemplo el pasaje de la potencia al acto) y su uso legítimo: el verdadero virtual difiere del falso porque puede calcularse y responde simplemente a las exigencias de la conservación del sistema total (como el virtual físico). Ahora bien, en el caso de las operaciones "estructuralmente posibles", nos hallamos en presencia de un virtual legítimo, puesto que existen instrumentos algebraicos que permiten descubrir la interven-

[4] No enseñadas en la escuela. En cuanto al esquema de las proporciones aparece a menudo antes de su introducción en la enseñanza.

ción de estructuras de conjunto y calcular su extensión como sus elementos; más adelante vamos a demostrarlo.

Mientras tanto me limitaré a señalar la siguiente conclusión: en un estado de equilibrio físico, sólo lo real es eficiente, mientras que lo posible es relativo en la mente del físico que deduce este real; por el contrario, en un estado de equilibrio mental no sólo las operaciones realmente ejecutadas son las que desempeñan un papel en el desenvolvimiento de los actos del pensamiento, sino también el conjunto de las operaciones posibles en tanto orientan la búsqueda hacia la clausura de la deducción, puesto que, en este caso, el sujeto es quien deduce y puesto que las operaciones posibles forman parte del mismo sistema deductivo que las operaciones reales efectuadas por este sujeto.[5]

§ 3. EL PROBLEMA DE LAS ESTRUCTURAS

A pesar de esa diferencia entre los procesos físicos y mentales, sigue siendo cierto en ambos casos que un sistema se encuentra en equilibrio cuando todas las transformaciones virtuales compatibles con las relaciones de ese sistema se compensan entre sí. Esta definición física del equilibrio corresponde en el terreno mental a las siguientes consideraciones. El estado fáctico, o real, corresponde pues a las operaciones explícitamente efectuadas por el sujeto, mientras que las transformaciones virtuales corresponden a las operaciones posibles que el sujeto podría efectuar y que luego quizás efectuará explícitamente, pero que todavía no efectuó del todo en el momento considerado; las vinculaciones del sistema corresponden por último a los datos del problema planteado, vale decir, al contenido sobre el que se ejercen las operaciones. ¿Cuándo se dirá entonces, en lo concerniente a tal sistema mental, que se alcanzó el equilibrio?

En primer lugar, no se lo alcanzará en tanto no se resuelva el problema, es decir en tanto se necesite todavía efectuar operaciones explícitas. Pero aquí hay que distinguir dos casos: el caso en que el sujeto se encuentra en posesión de todos los métodos y todas las operaciones indispensables para esta solución y el caso en que aún no las ha adquirido. Por supuesto, en el segundo caso no se podría hablar de equilibrio, puesto que queda por cumplirse un trabajo más o menos considerable hasta conseguir la solución del problema planteado. En el primer caso, si todavía hay desequilibrio, sólo es un desequilibrio momentáneo y parcial, vale decir, referido únicamente al nuevo problema cuya solución no se percibe de inmediato. Para lo demás, vale decir, para el conjunto de los métodos y las operaciones que el sujeto utiliza para la solución de los problemas de este tipo, puede decir-

[5] Desde el punto de vista de la psicología aplicada, ello equivale a decir que no sólo hay que evaluar a un sujeto por lo que realmente hace sino también por lo que podría hacer en otras situaciones, vale decir, por su "potencial" o sus "aptitudes".

se que se ha alcanzado el equilibrio, e incluso de modo permanente, puesto que el sujeto consiguió estas soluciones.

Un equilibrio de este tipo se caracteriza entonces, como el equilibrio físico, por la compensación del conjunto de las transformaciones virtuales. Equivale a decir que, una vez planteados los datos, el sujeto podría someterlos a un número indefinido de transformaciones operatorias, además de las elegidas para responder al problema planteado, pero que estas transformaciones son relativas a una estructura (la estructura de conjunto de las operaciones a disposición del sujeto) y que esta estructura es reversible: existe entonces un equilibrio porque a cada transformación que el sujeto podría efectuar (en función de la estructura operatoria considerada) corresponde una transformación posible inversa que también podría realizar. Más simplemente aún, el sistema se halla en equilibrio cuando las operaciones que el sujeto puede realizar constituyen una estructura tal que esas operaciones son susceptibles de dirigirse en los dos sentidos (sea por inversión estricta, o negación, o bien por reciprocidad). Porque el conjunto de las operaciones posibles constituye un sistema de transformaciones virtuales que se compensan —y que se compensan en tanto obedecen a leyes de reversibilidad— el sistema se encuentra en equilibrio. La reversibilidad operatoria y el equilibrio del sistema son de este modo, y en definitiva, una sola y misma cosa; porque las operaciones posibles son móviles y reversibles (vale decir que pueden componerse de todas las maneras posibles, pero con una total libertad de inversión) lo posible actúa continuamente sobre la elección de las operaciones nuevas que se realizarán.

Si ésta es la naturaleza del equilibrio operatorio, la solución para el problema del pensamiento formal consiste pues en buscar en el análisis de estructuras de conjunto que caractericen a las operaciones formales en oposición con las operaciones concretas. En efecto, por una parte el funcionamiento del equilibrio, tal como hemos intentado describirlo, es solidario de la existencia de una estructura de conjunto puesto que únicamente esta última se halla en condición de explicar la presencia y la extensión de las operaciones posibles, así como su acción sobre las operaciones efectivas. Por otra parte, el pensamiento formal como lo hemos visto, se caracteriza por una inversión de sentido entre lo real y lo posible, en la medida en que lo real se subordina a lo posible y en la medida en que lo posible adquiere una importancia desconocida hasta ahora en relación con lo real: ahora bien, nuevamente aquí, para determinar las proporciones entre las operaciones reales y las operaciones posibles en los niveles concreto y formal así como la extensión indefinida de las operaciones posibles en este último nivel, resulta indispensable comparar entre sí las estructuras operatorias de conjunto en juego en ambos casos. Lo haremos durante el capítulo siguiente.

Pero antes deben hacerse algunas observaciones acerca de la elección de los instrumentos lógico-matemáticos que hay que emplear para este análisis. Cuando el problema consiste en la determinación de los "factores" en juego en un trabajo mental o simplemente de las correlaciones entre diver-

sos rendimientos, para los psicólogos resulta muy natural recurrir al empleo de los métodos matemáticos del análisis factorial o del cálculo de las probabilidades, que no perjudican para nada los resultados buscados. Para resolver la cuestión de las estructuras operatorias de conjunto ¿existen métodos que sean tan precisos en su técnica de cálculo y tan objetivos como instrumentos de análisis?

Sí, existen: desde hace ya unas cuantas décadas, los matemáticos se esfuerzan por despejar estructuras generales que pueden encontrarse en los dominios más diversos, pero cuyas leyes de totalidad son independientes de su aplicación a dominios particulares. En sus tan notables trabajos, los Bourbaki sintetizan los resultados ya adquiridos en este dominio y les suman su propia contribución obtenida a partir del esfuerzo por realizar una reorganización de los principios matemáticos; llegaron entonces a la conclusión de que existen tres clases de estructuras fundamentales, cuyas combinaciones múltiples explican todas las otras: las estructuras algebraicas cuyo prototipo lo constituye el "grupo"; las estructuras de orden, una de cuyas formas principales es el "reticulado" y las estructuras topológicas referidas a lo continuo.

Ahora bien, si hacemos abstracción de las estructuras topológicas que en este caso no nos interesan,[6] comprobamos que las estructuras de grupos y las de los reticulados son comunes a las operaciones lógicas y a las operaciones matemáticas, vale decir, que el instrumento general de análisis de las estructuras forjado por los matemáticos vale tanto para el estudio cualitativo de las estructuras del pensamiento como para cualquier otra investigación estructural. En efecto, en el cálculo logístico de las proposiciones resulta fácil discernir la estructura de los reticulados y en otras partes hemos mostrado las múltiples formas bajo las que vuelve a encontrarse al grupo llamado de las 4 transformaciones (o *Vierergruppe* o también "grupo de Klein").[7]

Por lo tanto, aquí empleamos a la logística como cálculo o álgebra y no como lógica (ya que la lógica no tiene por qué intervenir en las explicaciones psicológicas, como tampoco ha de suceder a la inversa). Pero, desde esta perspectiva, la utilización del cálculo logístico se nos hace indispensable por lo menos por dos razones.

En primer lugar, este cálculo es el único que permite determinar la exacta expansión de las operaciones posibles en general. Sabemos, por ejemplo, que con 1; 2; 3; 4... proposiciones pueden construirse respectivamente 4; 16; 256; 65.536, etc., operaciones e incluso resulta fácil enumerarlas una por una, enumeración interesante hasta las 256 operaciones ternarias. Permite además mostrar que estos números, cuyos cuadrados aumentan con una rapidez desconcertante en comparación con las operacio-

[6] Pero que corresponde a lo que hemos llamado las operaciones *infralógicas* (véase cap. XVII, § 1, nota 2, pág. 232.

[7] Véase Piaget, *Essai sur les transformations des opérations logiques*, París, (PUF), 1952.

nes que efectuará realmente un sujeto ante un problema, no corresponden a operaciones irreductibles entre sí: pueden reducirse las 256 operaciones ternarias a pares o a tríos de operaciones binarias o a operaciones uninarias-binarias.

Sin embargo, y esto es lo importante para nuestro problema, el cálculo logístico permite mostrar que estos conjuntos de operaciones no consisten en simples sucesiones de elementos yuxtapuestos: por el contrario, estas colecciones de elementos en tanto totalidades tienen una estructura y las estructuras de conjunto de las operaciones proposicionales comparadas con las agrupaciones concretas de clases y relaciones, serán instructivas en su análisis para resolver los problemas psicológicos mencionados ya antes. En este sentido, el cálculo logístico permite un análisis que en cierto sentido penetra más a fondo dentro de la intimidad de los mecanismos intelectuales que el cálculo aritmético o estadístico: mientras que este último se refiere al rendimiento de las operaciones o bien a los "factores" cuya significación no proporciona directamente, el cálculo cualitativo del que dispone la logística penetra en las estructuras mismas, vale decir, en el mecanismo operatorio como tal, y no simplemente en sus resultados o sus condiciones más o menos generales.

Pero este empleo del cálculo de las estructuras supone, por supuesto, una continua confrontación entre los resultados experimentales y el análisis teórico. Desde el punto de vista de la experiencia, la inteligencia constituye, en primer lugar, una coordinación de las acciones, luego, operaciones que se orientan de estados en estados hacia ciertas formas de equilibrio. Ahora bien, estas formas de equilibrio, cuya importancia es por lo tanto esencial para la explicación del desarrollo, son susceptibles en efecto de un doble análisis: uno genético o experimental y el otro teórico. El análisis experimental consiste en la determinación, mediante pruebas apropiadas a los diversos niveles de la evolución, de cuáles son las operaciones en juego en los actos de inteligencia del sujeto y de cómo poco a poco estas operaciones se organizan en estructuras hasta alcanzar ciertas formas de equilibrio empíricamente comprobables. El análisis teórico consiste, por otra parte, en la caracterización de estas mismas estructuras en sus aspectos generales o abstractos, en la mostración de cómo las más complejas pueden construirse a partir de las más simples y en el cálculo del sistema de las operaciones posibles que implica el empleo de tal o cual operación efectiva.

Ahora bien, se percibe de entrada que estas dos clases de investigaciones pueden apoyarse en el estudio de los estados de equilibrio del pensamiento. Realizando esta confrontación permanente de sus resultados hemos intentado comprender el pasaje del nivel concreto al nivel formal en el pensamiento del niño y el adolescente, después de haber buscado en vano los criterios para distinguir el nivel formal en el pensamiento verbal, en las operaciones a la segunda potencia, etcétera.

Se comprueba además que este recurso al análisis teórico de las estructuras no constituye en absoluto una investigación que correspondería a la

lógica: siempre se trata sólo de psicología, pero con un empleo del cálculo logístico como un álgebra más general que el álgebra elemental fundada sobre las operaciones numéricas. Si pueden compararse las ciencias en formación con las ciencias ya desarrolladas en plena posesión de sus métodos (conservando pues las proporciones con objetividad y modestia), la psicología experimental correspondería en el plano mental a lo que es la física experimental en el terreno de la materia, mientras que la logística pura (o axiomática) correspondería por su parte a las matemáticas. En cuanto a la disciplina que consiste en construir la teoría de las operaciones mentales mediante el cálculo logístico, sería entonces a la psicología experimental un poco como lo que la física matemática es a la física de laboratorio: seguiría siendo una rama de la psicología, del mismo modo que la física matemática pertenece a la física y no a las matemáticas, pero emplearía al álgebra logística con el mismo título que la física matemática emplea las técnicas y los algoritmos de las matemáticas.

CAPITULO XVII

LAS ESTRUCTURAS CONCRETAS Y LAS ESTRUCTURAS FORMALES

Después de caracterizar la diferencia entre las formas de equilibrio concretas y formales mediante la extensión progresiva del conjunto de las operaciones virtuales o posibles, se trata ahora de comparar las estructuras totales que corresponden a estas dos formas de equilibrio.

§ 1. LAS AGRUPACIONES DEL PENSAMIENTO CONCRETO

Todo estado de equilibrio puede reconocerse, como acabamos de verlo (§ 2 del cap. XVI), por una cierta forma de reversibilidad. En consecuencia, la reversibilidad constituiría, en el caso en que el equilibrio alcanzado por el pensamiento sea de naturaleza operatoria (estadios II y III), el mecanismo esencial de las estructuras de conjunto que responderán a las diferentes formas de equilibrio.

Ahora bien, desde el punto de vista estructural, la reversibilidad —posibilidad permanente de un retorno al punto de partida— se presenta bajo dos formas distintas y complementarias. Puede volverse al punto de partida mediante la anulación de la operación realizada, lo que constituye una *inversión* o negación: el producto de la operación directa y su inversa es entonces la operación nula o idéntica. Pero también puede volverse al punto de partida mediante la anulación de una diferencia (en el sentido lógico del término), lo que constituye una *reciprocidad*: el producto de dos operaciones recíprocas es entonces no una operación nula sino una equivalencia.

La inversión y la reciprocidad se encuentran bajo distintos aspectos en todos los estadios del desarrollo, puesto que constituyen las condiciones de equilibrio de las acciones más elementales así como de las operaciones superiores. Sucede así que, ya en el nivel perceptivo (por más que no exista todavía ninguna reversibilidad completa), las inversiones corresponden a las adjunciones o supresiones de elementos y las reciprocidades a las simetrías y similitudes. Pero, dejaremos aquí a un lado sus formas preoperatorias, para

ocuparnos únicamente de las inversiones y reciprocidades propias de las operaciones concretas y formales.

Ahora bien, en este sentido existe una primera diferencia notable entre las estructuras de conjunto concretas y formales: mientras que las concretas logran reunir inversiones y reciprocidades en un sistema único de transformación (el "grupo" *INRC*), los sistemas propios de las operaciones concretas, o "agrupaciones" de clases y relaciones, provienen o bien de la inversión (clases) o bien de la reciprocidad (relaciones) sin que se constituya una síntesis general de estas dos formas de reversibilidad.[1] Recordemos, pues, brevemente en qué consisten estas estructuras.

De modo general, las operaciones lógicas concretas se caracterizan por actuar directamente sobre los objetos para reunirlos en clases de diversos órdenes o para establecer relaciones entre ellos. Pueden además distinguirse, junto a estas operaciones lógicas de clasificación o establecimiento de relaciones, operaciones infralógicas que consisten en reunir partes de objetos en un objeto espaciotemporal total y en sacar o poner esas partes según configuraciones continuas.[2] Sin embargo, y desde el punto de vista en el que aquí nos colocamos, esas operaciones infralógicas pueden reducirse a operaciones lógicas de encajes (clases) o relaciones.

Ahora bien, las estructuras de conjunto de clases y relaciones a las que se conforman las operaciones del pensamiento concreto son estructuras limitadas, que sólo reúnen estas clases o estas relaciones de próximo en próximo mediante encajes o encadenamientos contiguos. De este modo permanecen en el estado de grupos incompletos o en el estado de semirreticulados, porque sólo consideran estos encajes contiguos sin llegar a la combinatoria característica de los "conjuntos de partes", la única que permite la síntesis en un sistema único de las inversiones y reciprocidades.

Sucede así que las estructuras concretas de clases consisten exclusivamente en clasificaciones simples (aditivas) o múltiples (cuadros multiplicativos o matrices) de tal modo que cada clase depende definitivamente de aquellas de las que forma parte (A incluida en B, B en C, etc.) y se opone a su complementaria en relación con la clase inmediatamente superior ($A' = B - A : B' = C - B$; etc.), pero sin una combinatoria que proporcione todos los subconjuntos posibles de clases en el interior del sistema. Estas estructuras se apoyan de modo exclusivo en la reversibilidad por inversión: el sujeto puede así reunir dos clases contiguas en una sola ($A + A' = B$; etc.) o puede sustraer una clase del todo así formado ($A = B - A'$); también puede multiplicar dos clases, una por la otra ($A_1 \times$

[1] En efecto existen sistemas de clases o relaciones que realizan esta síntesis, pero se fundan en el "conjunto de las partes" y no en las agrupaciones simples: sin embargo son isomorfos a los sistemas proposicionales y sólo aparecen, en consecuencia, en el nivel formal.

[2] Lo que corresponde entonces a las estructuras topológicas (véase cap. XVI, § 3).

$\times A_2 = A_1A_2$), o abstraer una clase del todo así formado ($A_1A_2 : A_2 = A_1$); pero estos sistemas ignoran la forma general de la reciprocidad.

Las estructuras concretas de relaciones coordinan entre sí las equivalencias completas (igualdades) o parciales (alteridades) en el caso de las relaciones simétricas, las diferencias ordenadas en el caso de las relaciones asimétricas transitivas (seriaciones o encadenamientos) y suponen también sistemas multiplicativos (correspondencias, etcétera). La reversibilidad propia de estas estructuras es, pues, la reciprocidad. Por ejemplo, una relación simétrica como $A = B$ es idéntica a su recíproca $B = A$. Si una relación asimétrica $A < B$ es verdadera, su recíproca $B < A$ es falsa, y si ambas son verdaderas ($A \gtrless B$) se reducen a $A = B$, vale decir, a una equivalencia. Una relación asimétrica como $A < B$ expresa, en efecto, una cierta diferencia entre los términos A y B; si se anula esta diferencia o si se conviene en recorrerla en sentido inverso en la forma $B > A$ se vuelve a caer pues en una equivalencia $A = B$ o $A = A$ sin anular los términos. Así estos sistemas ignoran la reversibilidad por inversión (negación), que se refiere a términos de las relaciones (clases) y no a las relaciones mismas.

De modo general, las "agrupaciones" elementales que constituyen las únicas estructuras de conjunto accesibles en el nivel de las operaciones concretas se caracterizan por dos particularidades esenciales que las oponen a las estructuras formales:

1) Constituyen sistemas de encajes o encadenamientos simples o múltiples, pero sin combinatoria que vincule n a n los diversos elementos presentes; en consecuencia, no alcanzan la estructura de reticulado, que implica esta combinatoria ("conjunto de las partes"), sino que permanecen en el estado de semirreticulados;

2) Presentan una reversibilidad que consiste en una inversión (clases) o en una reciprocidad (relaciones) pero no pueden reunir esas dos formas de reversibilidad en un sistema único; en consecuencia, no se reúnen con la estructura del grupo de las inversiones y reciprocidades (el grupo *INRC* sobre el que volveremos) y permanecen en el estado de grupos incompletos.

Para precisar mejor esta situación, retomemos el ejemplo de las agrupaciones más complejas que alcanza el pensamiento concreto: las agrupaciones multiplicativas o cuadros de varias entradas (matrices). En el caso de las multiplicaciones de clases, hemos visto, a propósito de la flexibilidad (capítulo III) cómo el sujeto del estadio II construye estos cuadros. Limitémonos, para simplificar, a las siguientes clases: varillas de metal blando (A_1) o no (A'_1) y varillas bastante flexibles como para lograr el nivel deseado (A_2) o no (A'_2). El sujeto logra entonces construir con facilidad las siguientes 4 clases multiplicativas:

$$A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$$

Supongamos ahora que estas 4 posibilidades se realicen (lo cual sucede en efecto): el sujeto no podrá entonces concluir a partir únicamente de este

cuadro ni que el metal blando favorece la flexibilidad ni a la inversa. ¿Cómo procederá entonces?

Como en el nivel concreto (estadio II) el sujeto sólo puede efectuar asociaciones multiplicativas y correspondencias, simplemente va a seguir clasificando o seriando los datos: comprobará, por ejemplo, la existencia de clases A_1, A_2, A_3 (en la que A_3 representa a las varillas de sección circular) y A_1, A'_2, A'_3 y concluirá que las varillas de metal blando poco flexibles (A_1, A'_2) son poco flexibles porque no tienen sección circular (A'_3); etcétera. De este modo mediante asociaciones (entre clases) y correspondencias (entre relaciones) sucesivas logrará aislar un cierto número de factores (cap. III, §§ 2-3), pero no podrá ni descubrirlos todos ni demostrar la acción de los que descubrió, y es así porque carece de un método sistemático que supone en particular el empleo del procedimiento que consiste en hacer variar un solo factor, permaneciendo igual todo lo demás.

¿Cuál es entonces la estructura que interviene en el interior de este método sistemático? Aquí se establece la diferencia entre las simples asociaciones multiplicativas y las combinaciones n a n. El sujeto del nivel formal (estadio III), en presencia de las 4 clases del comienzo $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$ y sabiendo igualmente que intervienen otros factores diferentes a A_1 y A'_1, para explicar el resultado A_2 o A'_2 se planteará en efecto y ante todo el problema de las combinaciones posibles en el interior de estas 4 clases. Por ejemplo formulará hipótesis semejantes a las dos siguientes:

a) En ausencia de factores perturbadores, sólo se podrán observar los casos $A_1A_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$ (el caso $A_1A'_2$ no se presenta si A_1 no se encuentra acompañado por un factor que excluya a A_2). De este modo estas tres asociaciones conducirían a admitir que el carácter A_1, una vez aislado, siempre provoca el resultado A_2, pero sin ser el único que puede provocarlo (implicación);

b) También sólo podrían encontrarse los casos $A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$ (el caso A_1A_2 es entonces el resultado de la intervención de un factor que produce A_2 a pesar de la presencia de A_1): estas tres asociaciones $A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$ significarían así la incompatibilidad entre A_1 y A_2.

En resumen, en vez de limitarse a multiplicar las clases mediante sucesivas asociaciones, el método del estadio III consiste, en primer lugar, en distribuir las 4 clases $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$ según sus combinaciones n a n. Ahora bien, estas últimas suman 16:

(1) 0
(2) A_1A_2
(3) $A_1A'_2$
(4) A'_1A_2
(5) $A'_1A'_2$
(6) $A_1A_2 + A_1A'_2$
(7) $A_1A_2 + A'_1A_2$
(8) $A_1A_2 + A'_1A'_2$
(9) $A_1A'_2 + A'_1A_2$
(10) $A_1A'_2 + A'_1A'_2$
(11) $A'_1A_2 + A'_1A'_2$
(12) $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2$
(13) $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A'_2$
(14) $A_1A_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$
(15) $A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$
(16) $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$

Por cierto, resulta inútil que el sujeto construya un cuadro semejante en su totalidad. Lo esencial (y el comportamiento del adolescente muestra bastante que las cosas en efecto suceden así) es que, ante los 4 casos $A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$ se conciba que las relaciones entre A_1 y A_2 puedan ser múltiples. En efecto, esta multiplicidad de relaciones posibles, que el adolescente enfoca de entrada cuando se encuentra ante las asociaciones observadas al comienzo, supone que sólo algunas asociaciones siguen siendo verdaderas una vez eliminados los otros factores, y esta elección de las asociaciones verdaderas implica necesariamente una combinatoria. Por esto (e insistimos constantemente en ello) el empleo del procedimiento de prueba "permaneciendo igual todo lo demás" por más simple que parezca, constituye por sí solo un índice cierto de la intervención de esta combinatoria: sin la búsqueda de las combinaciones verdaderas en el interior de las combinaciones posibles, el sujeto no sentiría la necesidad de ir más allá de las asociaciones dadas para disociar los factores; se limitaría a la acumulación de nuevas asociaciones; mientras que, para lograr las combinaciones verdaderas por disociación de los factores, debe comenzar por concebir que, por lo menos, algunas combinaciones posibles son verdaderas, por lo tanto, emplear una combinatoria.

En conclusión, lo que les falta a las estructuras concretas de las agrupaciones, es la combinatoria inherente a la construcción del "conjunto de las partes" o, lo que viene a ser lo mismo, la utilización de operaciones proposicionales (implicación, etc.) o de operaciones que les sean isomorfas, puesto que las operaciones interproposicionales se apoyan en la estructura de este "conjunto de las partes". La diferencia entre las agrupaciones elementales de clases y relaciones (clasificaciones, seriaciones y correspondencias multiplicativas) y esta estructura reside, en efecto y en primer lugar, en que las primeras sólo constituyen semirreticulados mientras que el conjunto de las partes forma un reticulado completo. En segundo lugar, cada una de las operaciones que se refieren al "conjunto de las partes" implica una inversa y una recíproca: la segunda diferencia esencial entre las agrupaciones concretas y el sistema de las operaciones formales se debe entonces a la ausencia de un grupo único que vincule las inversiones y reciprocidades en el interior de las agrupaciones elementales y la presencia de este grupo una vez constituido "el conjunto de las partes".

Sin embargo, señalar estas diferencias entre las operaciones concretas y formales y reducirlas todas a la construcción de un "conjunto de las partes" no es suficiente. Ahora importa examinar cómo se efectúa en la realidad fáctica el pasaje entre las operaciones de clasificación, seriación, correspondencia, etc., sin tener en cuenta esta estructura ni las operaciones proposicionales: se trata, en otros términos, de comprender lo que conduce al sujeto, alrededor de los 11-12 años, a la construcción efectiva de los "conjuntos de partes".

§ 2. PASAJE DE LAS OPERACIONES CONCRETAS DE CLASES Y RELACIONES A LAS OPERACIONES INTERPROPOSICIONALES

A título de experiencia metodológica, hemos intentado traducir integralmente en fórmulas lógicas las afirmaciones sucesivas de una cierta cantidad de sujetos de los estadios II y III para examinar en qué casos razonaban mediante composiciones de clases o relaciones y en qué casos empleaban operaciones proposicionales. El resultado fue muy instructivo: casi es imposible, ante un enunciado aislado cualquiera, decidir entre estas dos posibilidades, y el problema sólo adquiere una significación psicológica en función del conjunto de los razonamientos del sujeto o de una sucesión bastante sistemática de inferencias. Por ejemplo, tomemos la proposición: "Esta varilla se dobla porque es de acero"; ¿estamos ante una operación de clases que se apoyaría aquí en la transitividad de las conclusiones y pertenencias: "esta varilla es de acero" y "todas las varillas de acero son flexibles", o estamos acaso en presencia de una verdadera implicación "si una varilla es de acero entonces se dobla", lo cual supondría la consideración de las tres conjunciones $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$? Del mismo modo, ¿una proposición que contiene la palabra "o" traduce una simple disyunción parcial entre clases o la disyunción proposicional $(p \vee q)$? Etcétera.

Ahora bien, sería inútil buscar un criterio exclusivamente verbal o lingüístico: por ejemplo considerar como implicaciones a los enunciados que contienen las palabras "si... entonces" y como inclusiones o correspondencias, etc., a los enunciados que no las contuvieran. En efecto, sólo algunas expresiones son decisivas: así cuando un sujeto declara "si fuese (tal factor) el que actuase entonces debería encontrarse (tal consecuencia no observada)", se puede estar seguro de la naturaleza hipotético-deductiva y, en consecuencia, proposicional de las operaciones en juego. Pero en casi todos los casos, el lenguaje permanece en un nivel implícito y el sujeto no despeja el detalle de sus inferencias. Además, el detalle de las expresiones verbales varía de un sujeto a otro y, a veces, incluso de un momento a otro en el mismo sujeto. En suma, el lenguaje de los sujetos sólo traduce de modo muy aproximado la estructura real de su pensamiento.

Un segundo método, que esta vez sí resulta adecuado, consiste en comparar todos los enunciados y, sobre todo, todas las acciones de un mismo sujeto. Vemos entonces si se limita a una simple lectura de los resultados brutos de la experiencia para extraer únicamente clasificaciones, seriaciones o correspondencias, que le son suficientes para encontrar una solución, o si intenta disociar los factores, lo cual implica a la vez un razonamiento hipotético-deductivo y una combinatoria: en este último caso, los juicios enunciados deben interpretarse como expresiones proposicionales, puesto que las relaciones (explícitas o implícitas) entre estos enunciados sucesivos consisten en operaciones interproposicionales.

Pero el método más seguro (este tercer método que por otra parte constituye una simple especialización del segundo) consiste en analizar las pruebas que el sujeto emplea. Si estas pruebas sólo equivalen a una toma de conciencia de las correspondencias observadas, las operaciones concretas son suficientes y nada autoriza a otorgarle al sujeto mecanismos de pensamiento más complejos. Si, por el contrario, interpreta una correspondencia dada como el resultado de varias combinaciones posibles, lo que lo conduce a una verificación de sus hipótesis en cuanto a sus consecuencias respectivas, entonces podemos estar seguros de hallarnos ante operaciones proposicionales.

Sin embargo, ¿no se apoyan acaso estas consideraciones en una petición de principio? Comenzamos por definir las operaciones concretas como extrañas a toda combinatoria y las operaciones formales como aquellas que sí requieren una: después de esto por supuesto debemos declarar que no se puede reconocer sólo en el nivel del lenguaje si un enunciado aislado es de naturaleza concreta o formal y que debemos recurrir al conjunto de los procedimientos de pensamiento del sujeto; esto desemboca en efecto en la distinción entre lo no combinatorio y lo combinatorio pero subordina la distinción entre lo concreto y lo formal a una interpretación previa. ¿No podríamos acaso atenernos a los enunciados sucesivos del sujeto y traducirlos indiferentemente en el lenguaje proposicional (desde los estadios inferiores) o en el lenguaje de las clases y las relaciones (hasta los niveles superiores)? Sin duda siempre resulta posible expresar en el lenguaje de clases, etc., a las operaciones proposicionales del nivel formal: pero a condición de introducir un "conjunto de las partes", por lo tanto, una combinatoria, ambos extraños a las "agrupaciones elementales", las únicas observables de los 7-8 a los 11-12 años. De modo recíproco, las operaciones inherentes a esas agrupaciones (clasificación, etc.) podrían expresarse en el lenguaje proposicional: pero entonces no se agotaría en absoluto la combinatoria interproposicional y uno se limitaría al empleo de un lenguaje complejo para describir lo que permanece en un estado estructural más simple en la mente del sujeto. Se cometería, pues, un error psicológico semejante al que consistiría, por ejemplo, en explicar los primeros números "naturales" (construidos por el niño mismo) mediante una estructura matemática más general aplicable a todos los números "reales".

Si nuestro objetivo es alcanzar las estructuras que operan efectivamente en la mente de los sujetos, debemos conformarnos a los criterios proporcionados por la combinatoria propia del "conjunto de las partes" para distinguir las operaciones concretas ("agrupaciones elementales" de clases y relaciones) de las operaciones formales ("reticulado" o "grupo" de las operaciones proposicionales). Pero, por supuesto, el sujeto no pasará del nivel de la simple lectura de los hechos brutos mediante clasificaciones, seriaciones y correspondencias, en el nivel de la descomposición combinatoria con un salto brusco y sin múltiples transiciones. Resulta pues necesario tomar en cuenta la continuidad de las etapas situadas entre estos dos estados bien diferenciados.

Ahora bien, tanto esa continuidad de transiciones como la dificultad, descripta anteriormente, para trazar las fronteras entre lo concreto y lo formal son extremadamente instructivas, ya que muestran de qué modo, desde el punto de vista psicológico, la forma del pensamiento superior deriva de la del inferior en vez de serle inmanente desde su comienzo. En efecto, si invocáramos una forma *a priori* de la razón para explicar la génesis de las estructuras formales, ¿por qué esta forma *a priori* sólo intervendría tardíamente? Sin duda puede invocarse la acción de una estructura nerviosa de maduración tardía, pero si bien esta condición de la elaboración de las operaciones combinatorias es probablemente necesaria, no es en todo caso suficiente, ya que la existencia de las etapas de transición muestra que hay una filiación entre las operaciones nuevas y las precedentes. Por lo tanto interviene además, y por encima de las condiciones internas de maduración, un factor de equilibración progresiva y se nos plantea entonces el problema de comprender cómo la búsqueda del equilibrio entre las diversas operaciones concretas o entre sus resultados conduce al sujeto a la construcción de una combinatoria formal. Por supuesto hay que reservarle una parte al ejercicio y la experiencia adquirida. Pero, conviene no sobreestimar la importancia de este factor, ya que, si la experiencia fuese el único motor del conocimiento, tanto la lectura correcta de la experiencia como su traducción al lenguaje de las operaciones proposicionales deberían ser primitivas (éstas son precisamente las tesis del "empirismo lógico"): ya no se comprende entonces por qué esta lectura resulta insuficiente durante tanto tiempo ni por qué la lógica de las proposiciones aparece tan tardíamente. Por el contrario, en la medida en que las operaciones derivan unas de las otras mediante coordinaciones progresivas y que las más simples proceden de la acción irreversible, se concibe por qué el equilibrio final de las operaciones combinatorias resulta tardío: el sujeto debe, en primer lugar, desubjetivizar sus acciones que puedan ser reversibles, lo que equivale a coordinarlas en agrupaciones elementales aún próximas a la manipulación; luego, como no alcanza de entrada la disociación entera entre forma y contenido, se ve obligado a reconstruir esas diversas agrupaciones en los sucesivos dominios heterogéneos que la experiencia le impone; sólo posteriormente a esta estructuración progresiva de los diferentes contenidos de la experiencia comienza a despejarse un mecanismo formal general mediante una coordinación de conjunto.

Las circunstancias bajo cuya influencia se realiza el pasaje de lo concreto a lo formal son entonces las siguientes. Después que el pensamiento concreto estructura etapa por etapa (o de modo simultáneo pero sin relación entre ellos) una cierta cantidad de dominios cualitativamente heterogéneos (tamaños lineales, superficies, pesos, velocidades y tiempos, etc.) sucede que, en muchas situaciones reales, estos dominios interfieren entre sí de diversas maneras: por ejemplo un mismo efecto puede ser la resultante de varias causas reunidas o, si sólo supone una, ésta puede encontrarse enmascarada por una serie de concomitancias. Mientras las operaciones concretas obren

contenido por contenido, tarde o temprano la realidad impone una mezcla de contenidos;[3] tendrán entonces que forjarse nuevos instrumentos operatorios.

El sujeto emplea entonces dos métodos al mismo tiempo, según que busque coordinar entre sí los resultados de las operaciones concretas, vale decir, evitar las contradicciones aparentes a las que conduce su empleo cuando sus contenidos respectivos interfieren entre sí de modo complejo, o según que busque coordinar directamente entre sí las diversas operaciones mismas, características de las agrupaciones concretas. Estos dos métodos, que conducen ambos al descubrimiento de la lógica formal de las proposiciones, consisten pues en lo siguiente: I) disociar la realidad bruta, por lo tanto, los contenidos estructurados por las solas operaciones concretas, de manera de poder coordinar los resultados de estas operaciones en función de las diversas combinaciones posibles, y II) coordinar las diversas agrupaciones de clases y relaciones en un único sistema total. Ahora bien, por más diferentes que parezcan estos dos procesos, vamos a ver que de hecho se reducen a uno solo, porque tanto el segundo como el primero se basan en una combinatoria. El verdadero problema consiste pues en comprender cómo aparece esta combinatoria.

I. — La observación muestra que, en el nivel de las operaciones concretas, el sujeto se esfuerza por estructurar la realidad del modo más completo que puede, pero se atiene a lo real en su forma bruta, vale decir, tal como aparece sin disociación alguna de los factores: clasifica, ordena, hace corresponder, etc., a los hechos tal como los registra de modo directo, sin criticar la experiencia y sin tomar precauciones metodológicas sistemáticas. Esto es así porque, como acabamos de recordarlo, la función de las operaciones concretas, entre los 7 y los 12 años, es la de estructurar lo real dominio por dominio, considerando a estos contenidos uno tras otro, a veces con algunos años de intervalo (longitudes a los 7-8 años, pesos a los 9-10 años, etcétera).

Cuando se trata entonces de la resolución de problemas en los que intervienen varios dominios de estructuración (por lo tanto, varios factores heterogéneos) el sujeto se enfrenta, tarde o temprano, con resultados poco coherentes e incluso contradictorios. Por ejemplo, comprueba que el acontecimiento x corresponde casi siempre al acontecimiento y (así una varilla de metal blando corresponde casi siempre a una gran flexibilidad), pero también encuentra casos en que se tiene $\bar{x}y$ e incluso $x\bar{y}$, por lo tanto, excepciones a la regla. Inversamente, por lo general puede observar una ausencia de correspondencia ($x\bar{y}$ y $\bar{x}y$) y sin embargo encontrar casos tales que se tenga xy y $\bar{x}\bar{y}$. En resumen, cuanto mejor analiza concretamente (por lo tanto, mediante simples correspondencias entre diversos contenidos) la rea-

[3] Esta mezcla se reduce a algo azaroso si las series causales son completamente independientes, pero no es algo fortuito en la medida en que presentan entre sí alguna dependencia.

lidad, más enfrenta una mezcla de regularidades parciales y excepciones que no pueden interpretarse con certeza. Al comienzo el sujeto con toda naturalidad no presta atención a las regularidades parciales, o sea sobre todo a las excepciones; pero, cuando comienza a tomarse en serio las exigencias de la experiencia, se encuentra ante una situación sin salida desde el punto de vista de la simple descripción concreta de los hechos brutos.

Tarde o temprano se impone entonces una nueva actitud experimental, cuya observación demuestra que en muchos casos se esboza a partir del nivel concreto pero que sólo se generaliza en el nivel formal: trátase del intento realizado para disociar los factores. En este capítulo de conclusiones intentamos comprender: *a*) bajo qué formas aparece; *b*) bajo qué formas se generaliza y por qué se generaliza tardíamente y, por último, *c*) cómo conduce necesariamente a una combinatoria.

a) Existen ya ciertas formas de disociación de los factores en el nivel concreto que merecen un atento examen. El sujeto del estadio II, al intentar decidir si un factor determinado desempeña o no un papel en un resultado dado, ya es capaz de realizar algunos procedimientos, algunos de pura observación y los otros de experimentación. En los casos que corresponden al primer tipo, hay que mencionar aquellos que le permiten al sujeto excluir un factor atribuyéndolo al azar. Por ejemplo, en la experiencia de los imanes (cap. VI) el sujeto, cuando ve que el disco se detiene sobre un color determinado, puede sentirse inclinado a atribuirle una cierta causalidad: la observación de las distribuciones fortuitas le permitirá rechazar esta afirmación. Aquí no debe confundirse disociación y exclusión: la disociación interviene gracias a la observación misma, que muestra casos en que el color en cuestión está a veces presente y a veces ausente. A partir de esta disociación por presencia o ausencia del factor en la observación, el sujeto del nivel concreto procede entonces en algunas situaciones a una disociación propiamente activa y experimental, y él mismo provoca la intervención o la supresión del factor: así, en la experiencia del péndulo (cap. IV) podrá verificar el papel eventual del impulso empujando a veces al péndulo y otras absteniéndose de sumar todo impulso al movimiento de caída.

Pero se comprueba que, en estos dos casos (observación o experimentación), la disociación de los factores propia del nivel concreto es una disociación por *negación*, vale decir, que el factor cuyo papel se cuestiona a veces está presente, y otras ausente (observación), o a veces se lo introduce y a veces se lo descarta (experimentación). Se trata pues exclusivamente de transformaciones por inversión o negación y no por reciprocidades, por lo tanto, de la primera forma de reversibilidad y no de las dos. En los casos en que un factor no puede excluirse, porque necesariamente se encuentra siempre presente (ejemplo: el peso de un objeto, la longitud de una varilla, etc.), los sujetos del nivel concreto no saben cómo separarlo y sólo consiguen hacerlo variar para verificar su papel: no consiguen pues neutralizarlo en algunos casos sí y en otros no, como lo harán los sujetos del estadio III.

Una segunda diferencia entre esas disociaciones elementales del estadio II y la disociación formal de los factores, en el caso de dos o varios factores *x*, *y*, etc., reside en que el sujeto sólo introduce o elimina el factor *x* para examinar si éste desempeña un papel activo y no para estudiar las variaciones de *y*: por ejemplo, en el caso del péndulo, sólo introduce o separa al impulso para examinar si ese factor ejerce una acción y no para analizar los efectos de la longitud del hilo, etc. Por el contrario, los sujetos del nivel formal descartarán un factor *x* no sólo para controlar su influencia, sino también para analizar la de *y* sin perturbación alguna por parte de *x*. Ahora bien, esta segunda diferencia es más importante aún que la primera y sin duda alguna nos entrega su razón.

b) Los dos descubrimientos propios de los comienzos del nivel formal son pues la posibilidad de disociar los factores mediante una neutralización así como mediante una exclusión, y la separación necesaria de un factor no sólo para analizar su acción, sino también para poner en evidencia la de los otros factores presentes: estas dos novedades son las que permitirán generalizar la disociación a todos los casos del estadio III (con realización acabada en el subestadio III B). Por ejemplo, sea una varilla de metal blando bastante larga cuya flexibilidad es superior a la de una varilla de acero corta: en ausencia de una disociación entre los factores metal y longitud, no se puede llegar a la conclusión de si la primera se dobla más porque es de metal blando o porque es más larga. Los sujetos del estadio concreto salen del paso (cuando obtienen la solución) multiplicando las correspondencias y comprobando que a veces el metal blando es una causa y a veces lo es la longitud, pero, como toda varilla tiene una materia y una longitud específica, no sólo no pueden excluir uno de estos factores para analizar al otro, sino que incluso ni piensan en hacerlo. Por el contrario, los sujetos del nivel formal saben (a menudo lo saben a partir del subestadio III A y siempre lo saben en el III B) que para manifestar el papel de metal hay que descartar el factor longitud y recíprocamente; esto se consigue mediante una variación por adjunciones o supresiones del factor restante. Además, saben que para descartar el factor no analizado no sólo es posible suprimirlo cuando lo permite su naturaleza, sino que además se lo puede neutralizar mediante una simple igualación cuando su naturaleza excluye la supresión: mantendrán pues iguales longitudes para estudiar el papel del metal y recíprocamente.

Se trata entonces, y aquí reside el problema central desde el punto de vista genético, de explicar cómo estos dos descubrimientos se efectúan teniendo como punto de partida los poderes limitados del nivel concreto.

El punto de partida de estas nuevas actitudes debe buscarse sin duda alguna en una inversión del sentido que a su vez es el resultado de la complicación creciente de los resultados a los que conducen los métodos concretos. En efecto, los sujetos del nivel II progresan continuamente ante una dificultad, multiplican las correspondencias y los intentos por establecer nuevas relaciones, esperando que la situación se aclarará junto con la abun-

dancia de los hechos. Tarde o temprano habrá que retroceder en el camino recorrido porque, frente a relaciones demasiado complejas, los factores no actualmente analizados actuarán como elementos perturbadores. Aparece entonces la conducta característica del nivel III que consiste, en presencia de las asociaciones *xy*, en descartar *y* para estudiar *x* sin interferencias perturbadoras, y recíprocamente. La necesidad de excluir un factor para modificar al otro nace pues de una inversión de sentido en la construcción de las correspondencias, que tienden a hacer abstracción o a disociar en vez de multiplicar o asociar, y ello por la complejidad excesiva y las contradicciones propias de la experiencia bruta.

Luego, algunos factores pueden descartarse por inversión o negación, pero no sucede así para todos los factores. La segunda novedad característica del estadio III consiste entonces en generalizar esta exclusión de los factores perturbadores al caso en que éstos no supongan una negación: lo que entonces se niega ya no es uno de los términos (propiedad o acontecimiento) sino la diferencia entre ellos. En otras palabras, el factor que debe excluirse simplemente se neutraliza por igualación de los términos presentes, lo cual constituye una *reciprocidad* y ya no una inversión: por ejemplo, para poner de manifiesto el factor metal *x* de una de las varillas comparadas, el sujeto mantendrá iguales las longitudes *y*, esta equivalencia resultante de la supresión de las diferencias entre las longitudes de las dos varillas, como la negación *0* resulta de la supresión del factor mismo en el caso del impulso, etcétera.

De ahí se sigue que la disociación de los factores propia del nivel formal, al utilizar las dos formas de reversibilidad de modo paralelo y al convertirlas en funcionalmente equivalentes, introduce una reversibilidad por reciprocidad y al mismo tiempo por inversión: se ve la importancia de este hecho en lo que se refiere a la construcción de las estructuras de conjunto propias al estadio III.

c) Tenemos aún que mostrar cómo estas dos novedades necesariamente provocan la constitución de una combinatoria. En efecto, una vez que el sujeto se ubica en la vía de la disociación de los factores se encuentra ante nuevas posibilidades. Por ejemplo, después de haber disociado al factor longitud del factor metal, en el caso de la flexibilidad, debe neutralizar los factores espesor, forma de sección, etc., y, dado el método mismo que adopta, se ve llevado a preguntarse sin cesar si no se ha olvidado de algo. ¿Cómo puede entonces obtenerse alguna seguridad? Por supuesto, en primer lugar, mediante la asociación de todos estos factores entre sí por la comparación 2 a 2, 3 a 3, etc.; pero ello corresponde aún a simples operaciones multiplicativas del nivel concreto (cuadros de 2, 3, ... entradas) y ya comprobamos bastante hasta qué punto estas asociaciones o correspondencias multiplicativas siguen siendo insuficientes para la solución de los problemas, por más que sea necesario comenzar por establecerlas. Sólo después, una vez construidas estas asociaciones de base, aparece una elección de las combinaciones probatorias dentro del conjunto de las combinaciones posibles.

Por lo tanto aquí es donde aparece necesariamente la combinatoria. En efecto, puede concebirse que cada uno de estos factores asociados actúe separadamente, por su propia cuenta, y entonces la combinación probatoria consiste en hacer variar a uno manteniendo invariable a los restantes (en el caso de la flexibilidad: cap. III). Pero también puede concebirse que dos o tres factores deban intervenir de modo simultáneo para provocar el efecto observado (en el caso de los colorantes: cap. VII). O también puede ser que el factor interviniente sea uno u otro, pero cada uno con exclusión del otro, o uno en sentido inverso a los otros (como el decolorante del cap. VII), etcétera. Resulta pues evidente que la disociación de los factores desemboca, según los casos, en un cierto número de posibilidades distintas que se traducen mediante implicaciones, equivalencias, disyunciones, conjunciones, exclusiones, incompatibilidades, etc. Cuando estas posibilidades ya existen en la mente del sujeto, vale decir, cuando éste posee de antemano, en virtud de sus adquisiciones anteriores, una gama suficiente de combinaciones posibles, resulta claro que ellas son las que orientan la disociación de los factores, mediante un rebote fácil de comprender. Pero si el sujeto aún las ignora y llega a descubrir el medio de disociar los factores al final del período de las operaciones concretas, entonces esta disociación lo conduce por sí misma a esta combinatoria, porque las combinaciones probatorias varían según las situaciones y porque, en cada situación, el descubrimiento de la combinación probatoria (descubrimiento que es el resultado de la disociación de los factores) supone una elección entre las asociaciones posibles. Por ejemplo, para dos factores x y y, el solo hecho de hacer variar a x dejando a y invariable (por lo tanto $xy + \bar{x}y$) constituye una elección de la combinación probatoria $(xy + \bar{x}y)$ entre las 4 asociaciones posibles $(xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y})$. En una palabra, la disociación de los factores desemboca necesariamente en la combinación n a n de las asociaciones de base entre sí, por lo tanto, en la sustitución de la combinatoria característica del "conjunto de las partes" por las simples operaciones de multiplicación o correspondencia que engendraron estas asociaciones de base.

II. — Después de comprobar por qué la disociación de los factores (por su parte resultado de la necesidad de coordinar entre sí a los resultados siempre más confusos obtenidos por las operaciones concretas de establecimiento de relación y correspondencia) desemboca necesariamente en una combinatoria, debemos ahora mostrar cómo esta combinatoria se constituye y engendra al pensamiento formal. Vamos a hacerlo investigando de qué modo la coordinación de las mismas operaciones concretas (y ya no sólo de sus resultados) desemboca en la combinatoria inherente a la lógica de las proposiciones, por lo tanto, en el pensamiento formal.

Una vez clasificados, seriados, igualados, colocados en correspondencias, etc., los diversos aspectos de la situación que condicionan la solución de un problema, su resolución puede hacer que sea necesario reunir en un solo sistema las operaciones que se efectuaron hasta el momento y a esto

precisamente conduce la necesidad de coordinar entre sí sus resultados cuando no son suficientemente coherentes.

Ahora bien, no existen operaciones que permitan vincular de modo directo las diversas agrupaciones de clases y relaciones en un sistema único sin ir más allá de los encajes simples, aditivos o multiplicativos, por lo tanto, sin construir su "conjunto de las partes", vale decir, justamente esta combinatoria cuya construcción en el pensamiento espontáneo de los sujetos intentamos ahora comprender. En cambio, existe, ya sea para las clases o bien para las relaciones (pero no para ambas al mismo tiempo), una agrupación más general que las otras porque las contiene o bien porque éstas derivan de aquélla a través de sucesivas especificaciones. La agrupación concreta más general es la agrupación multiplicativa (de clases o relaciones) que consiste en cuadros de doble entrada (o triple, etc.). Esta manera de agrupar los datos equivale pues, para dos acontecimientos o propiedades x y y, a la construcción de las asociaciones elementales $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$. Sin embargo, como acabamos de verlo en cuanto a la disociación de los factores y la combinatoria de ella resultante, al sujeto se le plantean nuevos problemas apenas tiene que decidir cuáles son, entre estas asociaciones, las verdaderas y cuál es la significación que debe atribuirles a estos subconjuntos. ¿Cómo opera entonces el sujeto? Resulta muy interesante comprobar que esta elección, o esta determinación de los subconjuntos de asociaciones verdaderas, dentro del conjunto de las posibilidades $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$, es el resultado de simples operaciones de clasificación, pero aplicadas a las mismas asociaciones (xy, etc.) y generalizadas a todos los casos posibles: de este modo el sujeto reúne el caso xy con el caso $x\bar{y}$, o el caso xy con el caso $\overline{x\bar{y}}$, etc., como si se tratase de una reunión de objetos calificados por propiedades comunes, mientras que, en realidad, se trata de reunir asociaciones, vale decir, situaciones en las que dos propiedades se presentan juntas (o una sin la otra, etc.) o incluso situaciones en las que se producen dos acontecimientos juntos (o el uno sin el otro, etc.).[4] En otros términos, el sujeto, al partir del conjunto multiplicativo $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$, construye su "conjunto de partes" mediante una nueva clasificación: aplica pues la más simple de las agrupaciones (la clasificación) a la más general (el cuadro de las multiplicaciones lógicas, y de este modo desemboca en una especie de agrupación a la segunda potencia que coordinará a todas las agrupaciones dentro de un sistema superior ya que no puede relacionarlas directamente unas con otras. Ahora bien, esta agrupación a la segunda potencia, por la aplicación de la clasificación generalizada [5] a las asociaciones multiplicativas no es otra sino una combinatoria n a n, de ahí las siguientes consecuencias en cuanto a la elaboración del pensamiento formal.

[4] Por ejemplo, en el caso ya recordado (en 1) acerca de la flexibilidad, clasificará juntas la varilla de metal blando de sección circular que alcanza un cierto nivel de flexibilidad (x y z) y la varilla de acero de la misma sección que no alcanza ese nivel ($\bar{x}$ y $\bar{z}$): de ahí la clase x y $z + \bar{x}$ y $\bar{z}$; etcétera.

[5] En otros trabajos hemos llamado a esta clasificación generalizada la *vicariancia* y constituye una "agrupación" distinta de clases.

1) En primer lugar, esta clasificación generalizada de las asociaciones xy, etc., desemboca en un nuevo modo de composición. Hasta aquí las clasificaciones empleadas por el sujeto estaban esencialmente formadas por encajes simples (por ejemplo, gorrión<pájaro<animal<ser vivo) conforme a la más elemental de las agrupaciones: $A + A' = B$; $B + B' = C$; etc.; o también por clasificaciones en función de dos criterios posibles (los ginebrinos más los otros suizos = los habitantes del cantón de Vaux más los otros suizos), o sea $A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2$; etc. (vicariancia). Ahora bien, cuando se trate de encajar unos en otros los subconjuntos de asociaciones en el interior de una agrupación multiplicativa y teniendo en cuenta las diferentes posibilidades, el modo de composición será muy diferente y se llegará a una combinación n a n por una generalización de la vicariancia. Para comprenderlo mejor, representemos a las 4 asociaciones de base de x y y con los números 1 a 4:

$$1 = xy \ ; \ 2 = x\bar{y} \ ; \ 3 = \bar{x}y \ \text{ y } \ 4 = \bar{x}\bar{y}$$

Las clases resultantes de los diversos encajes posibles serán entonces 16 (véase el cuadro del final del § 1):

(0)
(1) ; (2) ; (3) ; (4)
(1 + 2) ; (1 + 3) ; (1 + 4) ; (2 + 3) ; (2 + 4) ; (3 + 4)
(1 + 2 + 3) ; (1 + 2 + 4) ; (1 + 3 + 4) ; (2 + 3 + 4)
(1 + 2 + 3 + 4)

Estas clases, cuya construcción se realizará poco a poco en la mente del sujeto, ya sea mediante la comprobación de las situaciones reales o bien por la deducción de las combinaciones posibles, presentan entonces una nueva estructura comparada con la de las agrupaciones de operaciones concretas. En el caso de estas últimas, una clase elemental dada (A) encaja exclusivamente dentro de las clases superiores de la que forma parte de una vez por todas (B, C, etc.) salvo que se la excluya momentáneamente (por ejemplo los Pájaros son Vertebrados y los Vertebrados menos los Pájaros son Peces, Batracios, etc.). Por el contrario, en el caso de las asociaciones 1 a 4, cada asociación de base 1 (xy) o 2 ($x\bar{y}$), etc., encuentra un lugar en 7 clases de orden superior (por ejemplo 1 se encuentra en 1 + 2, en 1 + 3, en 1 + 4, en 1 + 2 + 3, en 1 + 2 + 4, en 1 + 3 + 4 y en 1 + 2 + 3 + 4), cada relación doble (1 + 2, etc.) se encuentra en 3 clases de orden superior y cada relación triple se encuentra en el mismo todo 1 + 2 + 3 + 4. Dicho de otro modo, el nuevo sistema que así se constituye ya no es una clasificación simple (ni siquiera una vicariancia entre clases de los mismos rangos): se trata de una clasificación generalizada o conjunto de todas las clasificaciones posibles compatibles con las asociaciones de base dadas. Ahora bien, ésta es precisamente la estructura del *reticulado* fundada sobre el "conjunto de

las partes" por combinación *n* a *n*, en oposición con la estructura de las agrupaciones elementales.

2) Por ello, ya no hay razón para formular la negación de una combinación cualquiera (por ejemplo la conjunción xy, o sea 1) de próximo en próximo mediante clases complementarias dentro de las clases más vecinas en las que encajan, como sucede con las agrupaciones concretas (si A es la clase de los gorriones y B la de los Pájaros, la complementaria que el sujeto elegirá para A no es la negación absoluta $\overline{A}$, vale decir, el conjunto de las realidades que no son gorriones, sino A', vale decir, los Pájaros distintos de los gorriones; y si C es la clase de los animales, B' será la de los animales distintos de los Pájaros, etc.): la negación de una combinación será el conjunto de las otras, vale decir, su complementaria en el todo: la conjunción $x \cdot y$ (o sea 1) tendrá pues como negación $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$ (o sea $2 + 3 + 4$), vale decir, la incompatibilidad (x/y);

3) De ello resulta que el sistema así construido supone a la vez *inversiones* (las negaciones que acabamos de ver) y *reciprocidades* ($x \supset y$ e $y \supset x$, etc.), estas inversiones y reciprocidades constituyen entonces un grupo de 4 transformaciones, del que no toma por supuesto conciencia el sujeto en su forma general, pero cuyas repercusiones sobre su pensamiento analizaremos más adelante.

4) De una manera general, en vez de referirse directamente a los objetos como tales, sus clases o relaciones, la composición combinatoria se referirá a conjuntos más complejos y a sus transformaciones. Por ejemplo, se tratará de saber si dos caracteres x y y se excluyen (de ahí $x\bar{y} + \bar{x}y$) o si simplemente son disyuntos pero pueden presentarse juntos (de donde $xy + x\bar{y} + \bar{x}y$). En este caso, el razonamiento ya no se refiere sólo a lo real, sino a lo real en función de lo *posible*. En efecto, la reunión (+) ya no es aquí una adición de los casos reales, ya que no siempre pueden realizarse de modo simultáneo, sino una reunión de los posibles, y, por ello, la operación fundamental de la lógica de las proposiciones se anota v en el sentido de "o": $x \vee y$ significa entonces (y ésta es en efecto la significación que adquiere la reunión de las asociaciones posibles en la mente del sujeto), "o xy es verdadero, o $x\bar{y}$, o $\bar{x}y$, o dos de estos casos sobre tres o los tres", lo cual equivale a afirmar que la expresión $x \vee y$ es una adición de 7 posibilidades.

5) Por último, y en la realidad misma, la composición combinatoria se refiere a *proposiciones*. Desde las operaciones concretas (y por otra parte desde el pensamiento preoperatorio), el razonamiento se apoya por cierto en proposiciones, con o sin una presencia perceptiva de los objetos descriptos. Pero la operación concreta consiste en la descomposición de las clases y relaciones en juego en la materia de la proposición: por lo tanto, en el nivel concreto, una proposición no se encuentra todavía relacionada con otra como proposición, sino sólo gracias a su contenido lógico que consiste en estructuras de clases y relaciones en correspondencia con los objetos mismos. En cambio, desde el momento en que la proposición enuncia simples posibili-

dades y que la composición consiste en reunir o disociar estos posibles como tales, esta composición ya no se realiza sobre objetos sino sobre los valores de verdad o falsedad de las combinaciones. De ahí el pasaje de la lógica de las clases o las relaciones a la lógica de las proposiciones, sobre la que volveremos en el § 3.

En suma, una vez comprometido en la vía de una coordinación de las agrupaciones concretas en un sistema único (a la segunda potencia), el pensamiento se vuelve formal porque se refiere a las combinaciones posibles y ya no a los objetos mismos. Por más inseguros e incompletos que sean en este sentido los primeros pasos del pensamiento, en los comienzos del estadio III, no por ello deja de orientarse hacia una nueva forma de equilibrio, caracterizada por una nueva estructura de conjunto que corresponde a la vez al reticulado y al grupo de las inversiones y reciprocidades. En efecto, si no se logra el equilibrio de inmediato se lo logrará a partir del nivel III B, porque resulta imposible coordinar operaciones sin desembocar tarde o temprano en un sistema de compensaciones necesarias, como lo atestigua toda la historia de las operaciones anteriores en el nivel concreto, sin hablar de las regulaciones intuitivas en el nivel preoperatorio.

§ 3. EL SISTEMA DE LAS 16 OPERACIONES BINARIAS

Después de describir de modo general el pasaje de las operaciones concretas a las operaciones formales o proposicionales, conviene verificar las hipótesis precedentes, controlando, en primer lugar, si el sujeto verdaderamente alcanza, durante los estadios III A y III B, a utilizar las 16 operaciones binarias de la lógica de las proposiciones, distinguiendo cada una de todas las restantes y vinculándolas unas con las otras en el curso de sus inferencias.

1-2. *La afirmación* (p ✶ q) *y la negación* (0) *completas.*[6] — La formación de las operaciones $p \star q$ y su negación 0 no plantea problema puesto que la primera, que es la afirmación de la posibilidad de las 4 asociaciones de base ($pq \vee p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$) no es sino la traducción, en términos de proposiciones p y q, de las 4 asociaciones ya incluidas en un cuadro de doble entrada concreto. Cuando, en la experiencia de la flexibilidad (cap. III), el sujeto clasifica sus varillas en varillas de metal blando o no y en varillas de sección circular o no, comprueba que las 4 asociaciones posibles están dadas: desde el nivel concreto ya puede entonces concluir que, en el material proporcionado, estos dos caracteres se hallan en parte relacionados entre sí y en parte no. La operación sólo adquiere entonces una significación proposicional a partir del momento en que se opone a las otras combinaciones posibles. Sucede así que, al buscar si un carácter x provoca la

[6] Estas dos operaciones corresponden a las expresiones (16) y (1) del cuadro de la pág. 234.

aparición de un carácter y o resulta de él, el sujeto deducirá entonces, a partir de la existencia de las 4 asociaciones, que los dos caracteres deben considerarse independientes entre sí, pero compatibles entre sí (estas dos afirmaciones se sostienen con algunas reservas hasta la realización de pruebas ulteriores, en el caso de que los factores no estén disociados entre sí): por ejemplo, en el caso del péndulo (cap. IV), si $p =$ el enunciado de un aumento de peso y $q =$ el de un aumento de velocidad, $\bar{p}$ y $\bar{q}$ los de un no aumento de peso o velocidad, se puede tener $pq \vee p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$ (si en pq y en $\bar{p}q$ se aumentó al mismo tiempo la longitud del péndulo y si en $p\bar{q}$ no se cambió el peso); el recuento de esas asociaciones brutas (sin disociación de los otros factores) ya será suficiente para mostrar que el factor peso no es decisivo. Pero, para lograr una exclusión precisa, el sujeto recurrirá a otras operaciones.

3-4. *La conjunción* (p · q) *y la incompatibilidad* (p/q).[7] — La conjunción $p \cdot q$ puede presentar dos significaciones: una general cuando la asociación $p \cdot q$ se halla vinculada con otras; y la otra particular cuando la asociación $p \cdot q$ constituye la única combinación verdadera (por exclusión de $p \cdot \bar{q}$, etcétera).

En el primer sentido, la conjunción pq no es más que la expresión proposicional de la operación multiplicativa ya conocida en el plano concreto en el caso en que dos clases A_1 y A_2 se hallan asociadas entre sí: $A_1 \times A_2 = A_1A_2$; o también, si $A + A' = B$, la asociación $A \times B$ da AB que es idéntico a A (ejemplo: los pájaros vertebrados constituyen la misma clase que los pájaros). Pero, en el plano concreto, la clase multiplicativa AB sólo encaja en B (y en C, etc., si C incluye a B), y la clase A_1B_2 sólo encaja en B_1B_2 ; etc. Por el contrario, la conjunción $p \cdot q$ puede formar parte de otras 7 combinaciones formales ($p \supset q$; $p \vee q$; $p = q$; $q \supset p$; $p \overset{*}{\vee} q$; etc.) que no encajan entre sí. La reacción propia de los sujetos de los niveles formales (reacción aún indecisa en el subestadio III A, pero sistemática en el III B) consistirá entonces, ante una asociación conjuntiva $p \cdot q$, en no concluir nada antes de establecer a qué otras asociaciones ($p \cdot \bar{q}$, etc.) se halla unida. En particular, la actitud característica del estadio III será la de luchar contra la tendencia a sacar conclusiones demasiado rápidamente de la presencia de $p \cdot q$ a la afirmación de una equivalencia $p \underset{C}{\supset} q$ o una implicación simple $p \supset q$. Ello resulta muy evidente si se comparan dos sujetos de los dos niveles III A y III B: en III A el sujeto cede demasiado rápidamente a esta tentación sin tomar la precaución de verificar si pq no está acompañado de $\bar{p}q$ y de $p\bar{q}$.

En su sentido limitado, en cambio, la conjunción pq significa la única verdad de la asociación pq con exclusión de las otras tres. Desde el punto de vista de la investigación, para admitir $p \cdot q$ en este sentido particular, nuevamente hay que probar con las otras tres asociaciones posibles. Pero,

[7] Estas dos operaciones corresponden a las combinaciones (2) y (15) del cuadro de la pág. 234.

una vez establecida, la conjunción $p \cdot q$ adquiere entonces un sentido fuerte, el de la unión necesaria de los enunciados de dos propiedades (estáticas) o de dos factores necesarios conjuntamente para obtener un resultado dado. En la experiencia de los colorantes (cap. VII) los sujetos de los niveles III A y III B logran así establecer la existencia de una conjunción ternaria (el ácido sulfúrico, el agua oxigenada y el yoduro de potasio son necesarios, los tres juntos, para producir el color amarillo). Ahora bien, es de gran interés comprobar que este descubrimiento supone el empleo previo de una combinatoria sistemática: se prueba cada uno de los factores con todos los otros 2 por 2, 3 por 3, y los 4 juntos: sólo la eliminación calculada de las combinaciones falsas permite que se obtenga la conjunción $p \cdot q \cdot r$ (donde p, q y r son los enunciados de la intervención respectiva de los tres factores útiles) y la ley $(p \cdot q \cdot r) \supset s$ (donde s es el enunciado del color). Sin duda esta combinatoria se refiere aquí más a objetos que a proposiciones, pero vimos que los dos sistemas son isomorfos y que el sujeto traduce su combinatoria física en una combinatoria proposicional.

La operación inversa de la conjunción $p \cdot q$ es la incompatibilidad $(p/q = p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q})$, cuya significación es que los caracteres denotados por p y q jamás están juntos, sólo aparece o el uno sin el otro o bien los dos están ausentes. Así, en la experiencia con los colorantes (cap. VII) el sujeto descubre que uno de los líquidos decolora la mezcla (expresada por $p \cdot q \cdot r$) de la que acabamos de hablar del siguiente modo: si s es el enunciado de la presencia del color y $\bar{s}$ el enunciado de su ausencia y si t afirma la presencia de uno de los líquidos considerados y $\bar{t}$ su ausencia, el sujeto comprueba que sólo se verifica la combinación $s\bar{t} \vee \bar{s}t \vee \bar{s}\bar{t}$. Pero, ¿acaso se necesita una operación formal para realizar este descubrimiento? Por una parte, a partir del nivel II B (9-11 años), el sujeto descubre que el tiosulfato decolora el líquido cuando está coloreado y no produce cambio alguno cuando es incoloro. Por otra parte, si a unos sujetos más jóvenes se les presentan cuadrados negros, círculos, rectángulos, etc., blancos y figuras cualesquiera de otros colores, se darán cuenta en efecto de que se tienen: (cuadrados no blancos) + (no cuadrados blancos) + (ni cuadrados ni blancos), lo que constituye una distribución de las asociaciones multiplicativas de clases isomorfas a una incompatibilidad. Pero, como decíamos al comienzo del § 2, sólo se puede saber si los razonamientos de un sujeto corresponden a la lógica de las proposiciones si se examina el conjunto de sus procedimientos experimentales y sus enunciados verbales. Ahora bien, el sujeto del nivel II B sólo descubre la acción decolorante del tiosulfato mezclando los líquidos al azar sin combinatoria sistemática alguna, y el sujeto más joven que clasifica figuras y colores sólo se da cuenta de la ausencia de cuadrados blancos cuando comprueba un vacío en su cuadro multiplicativo (formado por simples asociaciones 2 a 2, y no por combinaciones n a n). Por lo tanto sólo se podría, sin cometer el "sofisma de lo implícito", hablar de incompatibilidad p/q cuando los sujetos pueden oponer esta combinatoria al conjunto de las 15 combinaciones restantes del sistema o a las

principales combinaciones de ese sistema ($p \cdot q$; $p \vee q$; $p \supset q$; etc.). Ahora bien, precisamente sucede así con los sujetos del estadio III que, por una parte, se entregan a una combinatoria completa en sus ensayos experimentales sobre los colorantes y, por la otra, expresan los resultados mediante enunciados adecuados.

5-6. *La disyunción* ($p \vee q$) *y la negación conjunta* ($\bar{p} \cdot \bar{q}$).[8] — La disyunción $p \vee q$ significa que o p o q son verdaderos o que ambos son verdaderos. Servirá pues para expresar los casos en que un efecto puede ser el resultado de dos causas que actúan de modo independiente una de la otra, o bien conjuntamente: $p \vee q = p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$. Su negación $\bar{p} \cdot \bar{q}$ expresa entonces la ausencia simultánea de las dos causas. Constantemente vimos ejemplos de este tipo, incluso en su forma ternaria $p \vee q \vee r$ como sucede con el pequeño vagón (cap. XII): "Para hacerlo bajar se puede alzar la línea, o bien quitar peso (al contrapeso) o bien colocar peso en el vagón" (Clau, 11 años). A ello se le suma la comprensión inmediata de la inversa: $\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r} \supset \bar{s}$ (donde $s =$ no cambio).

De nuevo aquí resulta claro que, desde el nivel concreto, se encontrarán casos en que, después de multiplicar dos clases, B_1 y B_2, el sujeto comprueba la ausencia de $A'_1 A'_2$: las asociaciones restantes $A_1 A_2 + A_1 A'_2 + A'_1 A_2$ constituirán así el equivalente de una disyunción. Pero, de nuevo aquí, el criterio de la disyunción proposicional debe buscarse en su oposición respecto de las otras 15 combinaciones posibles.

7-8. *La implicación* ($p \supset q$) *y la no implicación* ($p \cdot \bar{q}$).[9] — El sujeto emplea la implicación $p \supset q$ que expresa la combinación $(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})$ cada vez que una causa expresada por la proposición p produce un efecto expresado por q, pero que no es la única que puede producirlo. En el ejemplo precedente donde un descenso de un pequeño vagón (expresado por s) puede ser el resultado de la mayor inclinación de la vía (p) o de la disminución del contrapeso (q) o de una carga más grande del vagón (r), el sujeto sabe que $p \supset s$, $q \supset s$ y $r \supset s$; en el caso $p \supset s$ se tiene en efecto: $p \cdot s$ (cuando lo que interviene es el primer factor) pero también $\bar{p} \cdot s$ (cuando son los otros dos) y por supuesto $\bar{p} \cdot \bar{s}$ (cuando no interviene ninguno).

La implicación, más que cualquier otra operación proposicional, puede provocar la ilusión de encontrarse ya en el nivel concreto. Desde el punto de vista de las clases, corresponde en efecto a la inclusión $A < B$ (donde $B = A + A'$). Si llamamos S a la clase que comprende al conjunto de los acontecimientos descriptos por la proposición s (los descensos del pequeño vagón) y P a la clase de los descensos relacionados con una inclinación mayor de la vía (véase prop. p), la inclusión $P < S$ significará $P + P' = S$, vale decir, que todos los P son S pero que existen S que no son P (estos P'

[8] Estas operaciones corresponden a las combinaciones (12) y (5) del cuadro de la pág. 234.

[9] Correspondientes a las combinaciones (14) y (3) del cuadro de la pág. 234.

corresponderán entonces a los descensos que son el resultado de los cambios de peso: véase prop. q y r). La implicación $p \supset s$ podría de este modo expresarse mediante la inclusión $P < S$. Desde el punto de vista de las relaciones, la misma implicación corresponde, por otra parte y en consecuencia, a una correspondencia counívoca: a los efectos S corresponden las causas P, Q, R, de ahí la correspondencia $S \leftarrow \begin{matrix} P \\ Q \\ R \end{matrix}$ en la que P corresponde de modo unívoco a S, pero sin que esta univocidad sea recíproca (una causa sólo corresponde a su efecto, pero el mismo efecto puede corresponder a varias causas).

Sin embargo, nuevamente aquí la diferencia entre una implicación verdadera y una inclusión o una correspondencia counívoca se reconoce psicológicamente en el procedimiento de conjunto de los razonamientos del sujeto: mientras proceda por inclusiones o correspondencias (estadio II), el sujeto se limita a clasificar y seriar los datos brutos de la experiencia, mientras que el descubrimiento de la implicación como tal consiste en diferenciarla de las otras combinaciones posibles ($p \vee q$, $p = q$, etc.): ahora bien, esto se distingue por el hecho de que el sujeto busca entonces disociar los factores eventuales, precisamente con el fin de verificar cuáles son las combinaciones reales entre las combinaciones posibles compatibles con la situación dada.

Sin embargo, si la implicación proposicional se distingue de este modo psicológicamente de la inclusión de las clases, no por ello resulta menos interesante buscar cómo se efectúa el pasaje de ésta a aquélla. En efecto, no hay que perder de vista que incluso en el estadio III el sujeto comienza por clasificar los datos, por relacionarlos, etc., antes de traducir esta estructuración concreta previa (y siempre indispensable) en una estructura proposicional. Se plantea entonces el problema de saber cuáles son las formas más espontáneas de la implicación y sus relaciones con los vínculos concretos correspondientes.

Ahora bien, la implicación puede expresarse por lo menos de tres maneras equivalentes: $p \supset q$; $\bar{p} \vee q$ y $p = p \cdot q$, expresiones cuyo cálculo da el mismo producto $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$. Por ejemplo, si p expresa que una varilla es delgada y q que es flexible, ello equivale a la afirmación: "Si es delgada, entonces es flexible" ($p \supset q$), "o bien no es delgada, o bien es flexible" ($\bar{p} \vee q$), o también "decir que es delgada equivale a decir que es delgada y flexible" ($p = p \cdot q$). Observemos además que, según una ley muy conocida de los reticulados, si se tiene $p = p \cdot q$ de ello se deduce $q = p \vee q$, equivalencia que a su vez equivale también a $p \supset q$ (ya que su cálculo también da $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$). Dicho esto, parece claro que la forma psicológica más simple de la implicación sea en efecto $p = p \cdot q$ ya que, antes de sostener "si esta varilla es delgada entonces es flexible", el sujeto debe asegurarse de que delgado equivale siempre a delgado y flexible. Ahora

bien, $p = p \cdot q$ y $q = p \vee q$ son las traducciones más directas del producto $A \times B = A$, y de la suma $A + B = B$, fundamentos de la inclusión $A < B$.

La negación de la implicación es la no implicación $\overline{p \supset q} = p \cdot \bar{q}$. Esta operación, como todas las formadas con un solo par (lo vimos a propósito de $p \cdot q$), puede presentarse aisladamente, o bien reunida con otras 7 formas diferentes que en este caso son: p/q; $p \vee q$; $q \supset p$; $p \barwedge q$; $p\,[q]$; $\bar{q}\,[p]$ y por supuesto $p \mathbin{\overset{*}{\wedge}} q$.

Los sujetos la emplean a menudo en su forma aislada para probar la no intervención de un factor posible. Por ejemplo, en el caso del péndulo (cap. I) al sujeto del estadio III le será suficiente realizar un aumento de peso (expresado por p), dejando todo lo demás igual y comprobar que la velocidad no aumenta ($\bar{q}$), para convencerse de que el peso no ejerce acción: $p \cdot \bar{q} = \overline{(p \supset q)}$. Pero, aquí como siempre, el carácter formal de esta operación (en oposición a las comprobaciones de no correspondencia propias del nivel concreto) es solidario del conjunto de la combinatoria en juego: antes de concluir a partir de la lectura de $p \cdot \bar{q}$ que se trata en efecto de una no implicación, el sujeto del nivel III se asegura de que no tiene que vérselas con otras combinaciones que incluyan a $p \cdot \bar{q}$, y no $p \cdot q$. Por ello mantiene invariantes los otros factores cuando estudia los efectos de un factor considerado, de tal modo que pueda despejar las combinaciones reales de las combinaciones posibles.

9-10. *La implicación recíproca* ($q \supset p$) *y su negación* ($\bar{p} \cdot q$).[10] — La implicación $q \supset p$ por sí sola no representa por supuesto una significación diferente de la de $p \supset q$ puesto que siempre se puede llamar q a la proposición p y recíprocamente. La operación $q \supset p$ sólo tiene pues un alcance distinto comparada con una operación $p \supset q$ ya determinada o en vía de determinación. Los dos problemas que se le plantean entonces al sujeto son los siguientes:

1) Si la relación $p \supset q$ es verdadera (por ejemplo $p =$ el enunciado de un aumento del ángulo de incidencia en la experiencia del billar, cap. I, y $q =$ el aumento del ángulo de reflexión) ¿lo será entonces también $q \supset p$? (Esto significará que al comprobar un aumento del ángulo de reflexión el sujeto deducirá el aumento del ángulo de incidencia incluso cuando no haya podido observar las condiciones del tiro). Si es así, entonces se tiene $(p \supset q) \cdot (q \supset p) = (p = q)$, vale decir, que hay una equivalencia proposicional entre p y q ($= p$ y q siempre son verdaderas juntas o falsas juntas).

2) Si aún no se estableció el vínculo $p \supset q$ sino que éste sigue siendo problemático durante la investigación, el sujeto puede preguntarse si $p \supset q$ o $q \supset p$ es la implicación verdadera. Por ejemplo, en el caso de los indicadores y los colorantes (cap. VII), el sujeto puede preguntarse si el último líquido introducido en la mezcla es el que modifica su color (hipótesis dominante entre los sujetos más jóvenes: el último frasco utilizado es el que

[10] Correspondientes a las combinaciones (13) y (4) del cuadro de la pág. 234.

contiene el poder colorante), o por el contrario si lo que provoca el color es la mezcla de cada componente, incluido el último colocado: entonces el problema es el siguiente: $p \supset q$ o $q \supset p$, y se percibe enseguida que el solo hecho de plantear o incluso captar la significación de esta cuestión constituye por sí solo un índice de la movilidad formal: más aún que las otras, la operación $q \supset p$ sólo adquiere realidad operatoria en conexión con el conjunto del sistema.

En cuanto a la negación de $q \supset p$, vale decir, $\bar{p} \cdot q$, da lugar a las mismas observaciones que la operación $p \cdot \bar{q}$ de la que hablamos en (8). Sólo señalemos que la reunión de las dos no-implicaciones $p \cdot \bar{q}$ y $\bar{p} \cdot q$ constituye una exclusión recíproca, sea $p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$, de la que volveremos a hablar más adelante.

11-12. *La equivalencia* $(p = q)$ *y su negación, la exclusión recíproca* $(p \vee q)$.[11] — La equivalencia proposicional no es una identidad ni una igualdad, sino simplemente la afirmación de que dos proposiciones siempre son verdaderas juntas o falsas juntas. Desde el punto de vista de las clases, vale decir, del conjunto de los objetos a los que se aplican estas proposiciones, la equivalencia corresponde a la identidad de una misma clase, pero de una clase multiplicativa tanto como aditiva. Por ejemplo, la equivalencia entre "Este animal es un protozoario (A)" y "Este animal es un invertebrado (B) unicelular" corresponde a una misma clase aditiva, ya que si $A' =$ los invertebrados pluricelulares, la equivalencia corresponde simplemente a $A = B - A'$. Pero la equivalencia entre "Este animal tiene una columna vertebral" y "Este animal tiene una médula espinal" corresponde a una clase multiplicativa $A_1 A_2$. Desde el punto de vista de las relaciones, la equivalencia corresponde pues a una correspondencia biunívoca y recíproca, la que siempre es reflexiva pero no necesariamente reflexionada.

En la experiencia del péndulo (cap. IV) el aumento de longitud (expresado por p) corresponde a un aumento de velocidad (expresado por q) y recíprocamente: de ahí $(p \supset q) \cdot (q \supset p) = (p = q)$. El sujeto alcanza esta equivalencia cuando, después de construir la implicación $p \supset q$, llega a establecer que el efecto (q) no tiene otra causa posible sino (p) y entonces siempre le corresponde en retorno.

La exclusión recíproca $p \vee q$ es la negación de la equivalencia y corresponde a la reunión de las dos no implicaciones $p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$ así como la equivalencia es el producto de las dos implicaciones $p \supset q$ y $q \supset p$. Desde el punto de vista de las clases, la exclusión corresponde a la pertenencia exclusiva a cada una de las dos clases enteramente disyuntas y, desde el punto de vista de las relaciones, a una correspondencia inversa. Por ejemplo, en la experiencia de la balanza (cap. XI), si el sujeto considera al conjunto de los estados de equilibrio cuando la balanza es horizontal, todo aumento de peso (expresado por p) corresponde a una disminución de distancia $(\bar{q})$

[11] Las operaciones corresponden a las combinaciones (8) y (9) del cuadro de la pág. 234.

y todo aumento de distancia (q) a una disminución de peso ($\bar{p}$), de donde $p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$: en este caso la exclusión recíproca corresponde a dos seriaciones en correspondencia inversa. En cuanto a la correspondencia con las clases, puede retomarse el ejemplo de los colorantes citado anteriormente a propósito de la incompatibilidad: la única diferencia entre ésta y la exclusión recíproca se debe a la presencia o ausencia de la asociación $\bar{p} \cdot \bar{q}$ lo que puede tener importancia cuando se trata de saber si p o q siempre son verdaderas la una o la otra, pero, por lo general, no tiene importancia alguna, puesto que entonces la asociación $\bar{p} \cdot \bar{q}$ corresponde a la situación en que no sucede nada.

13-14. *La afirmación y la negación de* p, *o sea* p [q] *y* $\bar{p}$ [q].[12] — La operación $p\,[q]$ equivale a $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$ y su negación $\bar{p}\,[q]$ a $\bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$. Estas operaciones equivalen pues a afirmar (o a negar) que p es verdadera en las dos situaciones en que q es verdadera y en que q es falsa: dicho en otras palabras, estas dos operaciones equivalen a afirmar (o a negar) a p con independencia de q.

Ahora bien, esa relación particular de independencia relativa, pero no de exclusión, de p o de $\bar{p}$ en relación con q es muy importante en el funcionamiento del pensamiento formal: por lo general gracias a estas operaciones $p\,[q]$ y $\bar{p}\,[q]$ los sujetos del estadio III logran establecer que un factor no interviene o no es determinante en la producción de un fenómeno. En efecto, si el factor enunciado por p interviene tanto cuando el acontecimiento enunciado por q no se produce ($\bar{q}$) como cuando se produce (q), es porque el factor enunciado en p no es la causa del acontecimiento descripto en q. Por lo tanto, gracias a esta operación $p\,[q]$ el sujeto logra excluir la hipótesis de la intervención de un factor. Recíprocamente, si se tiene $\bar{p}\,[q]$, vale decir a $\bar{p} \cdot q$ y $\bar{p} \cdot \bar{q}$ la ausencia del factor enunciado por p no impide que se produzca o no el acontecimiento descripto en q, lo que confirma la necesidad de excluir la hipótesis de una intervención del factor enunciado en p. Sin embargo, en las operaciones $p\,[q]$ y $\bar{p}\,[q]$ hay una exclusión simple y no recíproca como en $p \vee\!\!\vee q$, ya que si $p\,[q]$ como $p \vee\!\!\vee q$ contiene $p \cdot \bar{q}$, la operación $p\,[q]$ supone en cambio también a la asociación $p \cdot q$, ausente de $p \vee\!\!\vee q$ y de p/q.

Por ejemplo, en la experiencia de los imanes (cap. VI), puede aumentarse el peso de una caja (aumento que enunciaremos con $\bar{p}$): en ciertos casos el disco se detendrá entonces ante esta caja (sea q) y en otros casos no se detendrá, entonces ($\bar{q}$). El sujeto deduce en consecuencia, a partir de la combinación $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$ que el aumento del peso no desempeña papel alguno y que la detención o no detención de la aguja (q o $\bar{q}$) es el resultado de otros factores. Recíprocamente, el no aumento del peso de la caja (enunciado $\bar{p}$) viene acompañado también por los acontecimientos descrip-

[12] Estas dos operaciones corresponden a las combinaciones (I) y (II) de la pág. 234.

tos en q y $\overline{q}$: o sea $\overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{p}\,[q]$. Esta contraprueba confirma la conclusión precedente.

15-16. *La afirmación de* q *y su negación, o sea* q [p] *y* $\overline{q}$ [p].[13] — Las dos operaciones $q\,[p]$ y $\overline{q}\,[p]$ presentan la misma estructura que las anteriores pero con permutación de p y de q. En efecto, $q\,[p]$ equivale a $p \cdot q \vee \overline{p} \cdot q$ y $\overline{q}\,[p]$ a $p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$. Consideradas en forma aislada, no le suman nada al sistema, pero comparadas con las precedentes, permiten nuevas combinaciones.

Por ejemplo, si $p\,[q]$ y $q\,[p]$ son ambas verdaderas al mismo tiempo y si son las únicas verdaderas, se tiene $p \cdot q \vee p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q$, vale decir $p \vee q$. Si $p\,[q]$ y $\overline{q}\,[p]$ verdaderas al mismo tiempo y si son las únicas verdaderas, se tiene $p \cdot q \vee p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$, por lo tanto, $q \supset p$. Si $\overline{p}\,[q]$ y $q\,[p]$ son ambas y las únicas verdaderas, se tiene $p \cdot q \vee p \cdot q \vee \overline{p} \cdot q$, por lo tanto, $p \supset q$, y si $\overline{p}\,[q]$ y $\overline{q}\,[p]$ son ambas y las únicas verdaderas, se tiene $p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$, por lo tanto, p/q. Ahora bien, cada una de estas composiciones puede corresponder a una elaboración efectiva de los datos, durante las pruebas sucesivas del sujeto: las operaciones $q\,[p]$ y $\overline{q}\,[p]$ no son pues la simple réplica de $p\,[q]$ y $\overline{p}\,[q]$ sino que desempeñan un papel efectivo en el descubrimiento.

§ 4. LA PUESTA EN FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA DE LAS 16 OPERACIONES BINARIAS Y LA NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO FORMAL

Acabamos de comprobar que cada una de las operaciones proposicionales binarias corresponde, en el dominio de las operaciones concretas, a tal o cual estructura parcial de una o de varias de las 8 "agrupaciones" elementales de clases o relaciones. ¿No podría acaso sostenerse que los sujetos del nivel concreto disponen de hecho, una vez construidas las 8 "agrupaciones" (y sabemos que se elaboran simultáneamente y sólo sus dominios de aplicación son sucesivos), de un repertorio operatorio equivalente al de las 16 operaciones proposicionales fundamentales y desde el punto de vista funcional equivalente a una combinatoria? No es así porque no existen transformaciones generales que permitan pasar de una de las agrupaciones de clases o relaciones a otra, mientras que las operaciones proposicionales forman un sistema único tal que se puede proceder precisamente a partir de uno de sus 16 elementos a cada uno de los otros. Por ello la coordinación de las agrupaciones de clases y relaciones en un sistema único supone, como vimos en §§ 1 y 2, la introducción de una nueva estructura, la del "conjunto de las partes" con su combinatoria n a n, que se construye a partir de las agrupaciones multiplicativas mediante una generalización de la clasificación

[13] Estas dos operaciones corresponden a las combinaciones (7) y (10) del cuadro de la pág. 234.

aplicada a las asociaciones elementales (la agrupación a la segunda potencia descripta en el § 2 de este capítulo, II-1): este sistema único constituye entonces el de las 16 operaciones proposicionales binarias.

El problema que entonces se plantea es el de saber si el sujeto tiene conciencia de la existencia del sistema de las operaciones proposicionales en tanto sistema. Si se trata de una reflexión acerca del sistema, resulta claro que no es así, puesto que fue necesario esperar los trabajos de los lógicos para despejar esta lógica reflexiva. Pero, como decía Brunschvicg, la lógica es como el arte poética, que codifica *a posteriori* las leyes de una poesía ya escrita y que no preside en absoluto su creación. En el terreno de esta lógica en estado práctico que es la del adolescente y que no tiene nada que ver con la lógica formulada del lógico, entenderemos como conciencia del sistema, el establecimiento de conexiones deseadas y buscadas por sí mismas entre las diversas operaciones posibles del conjunto: en este caso, parece claro que, después de una fase de construcción progresiva y aún poco coordinada, durante el subestadio III A, los sujetos del nivel III B tienen conciencia del sistema: [14] ante una asociación elemental $p \cdot q$ o $p \cdot \bar{q}$, etc., saben que puede formar parte de varias combinaciones (por ejemplo $p \,\mathrm{*}\, q$, $p\,[q]$ o $p \supset q$) y verifican su verdad o falsedad más o menos de modo sistemático; recíprocamente, formulando la hipótesis de una combinación compleja, como $p \supset q$ saben verificarla remontándose a sus elementos $p \cdot q$ y $\bar{p} \cdot q$ o buscando la contraprueba en la falsedad de $p \cdot \bar{q}$.

Este establecimiento de relación continua entre las diversas operaciones o combinaciones posibles del sistema supone entonces dos consecuencias: una en lo que se refiere a las inferencias o razonamientos del sujeto, la otra en lo que concierne a la intervención de las estructuras operatorias de conjunto como tales.

Las 16 operaciones binarias cuya intervención efectiva acabamos de verificar en el pensamiento de los sujetos del nivel formal no constituyen por sí solas razonamientos o inferencias: sólo corresponden a juicios más o menos complejos, pero no a sucesiones inferenciales. Incluso la implicación $p \supset q$ se limita a afirmar una relación que puede reducirse a un solo juicio $p = p \cdot q$. ¿En qué consisten entonces los razonamientos de nuestros sujetos? ¿Tendremos ahora que formular un conjunto de nuevas relaciones que se superpondrán a las precedentes para explicar el aspecto propiamente deductivo del pensamiento formal espontáneo?

Los lógicos distinguen con cuidado, por una parte, los dos dominios de las operaciones elementales y, por la otra, los mecanismos inferenciales. En primer lugar, los distinguen desde el punto de vista de las operaciones mismas: por ejemplo, en una deducción como $[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset [p \supset r]$ ("si p implica q y q implica r, entonces p implica r"), se considerarán las tres implicaciones $p \supset q$, $q \supset r$ y $p \supset r$ como implicaciones simples o "materiales"

[14] Por supuesto, puede tenerse conciencia de un sistema operatorio sin saber traducirlo a símbolos algebraicos, como sucede por ejemplo con la seriación.

y la implicación que relaciona a las dos primeras con la tercera se la considerará una implicación "inferencial" que constituiría, respecto de las precedentes, una operación de un nuevo tipo. En segundo lugar, resulta claro que la solución del problema de la deducción o la "decisión" requiere, desde el punto de vista lógico, la intervención de nuevos axiomas y una construcción formal mucho más compleja (distinguiendo entre una sintaxis y una semántica lógica, etc.) que la requerida para la teoría de las operaciones elementales.

Sin embargo, nada de esto nos interesa de derecho,[15] ya que la distinción entre los dos dominios puede seguir siendo referida a las meras necesidades de la axiomatización o la lógica normativa. Desde el punto de vista psicológico que nos importa aquí con exclusividad, los únicos problemas consisten en saber si en sus razonamientos propiamente dichos, los sujetos del nivel III utilizan otras operaciones que las anteriores y, de no ser así saber entonces cómo proceden para razonar mediante estos mismos mecanismos operatorios. Ahora bien, la respuesta que el examen de los hechos impone es de una gran simplicidad: en la medida en que los juicios enunciados por los sujetos corresponden a las operaciones del sistema proposicional y en la medida en que estas operaciones pueden formularse mediante los símbolos de un álgebra (como lo hacemos aquí), los razonamientos de estos sujetos corresponden sin más a las transformaciones que relacionan estas operaciones entre sí; estas transformaciones corresponden entonces al cálculo mismo inherente a esta álgebra. En una palabra, el razonamiento no es sino el cálculo que las operaciones proposicionales implican y, si este cálculo sigue estando vinculado con el lenguaje corriente en el pensamiento de los sujetos, puede expresárselo simbólicamente gracias al álgebra de la lógica de las proposiciones.

Veamos un ejemplo. Después de establecer una implicación cualquiera $p \supset q$ mediante la observación de las tres asociaciones $p \cdot q$, $\bar{p} \cdot q$ y $\bar{p} \cdot \bar{q}$ y después de haber hecho lo mismo con la implicación $q \supset r$ $(= q \cdot r \vee \bar{q} \cdot r \vee \bar{q} \cdot \bar{r})$ ningún sujeto dudará que de ello se sigue la implicación $p \supset r$ $(= p \cdot r \vee \bar{p} \cdot r \vee \bar{p} \cdot \bar{r})$. ¿Se debe entonces hacer intervenir a la implicación inferencial de la que se habló anteriormente $(p \supset q \cdot q \supset r) \supset (p \supset r)$, además de las implicaciones elementales, o basta el cálculo para imponer $(p \supset r)$? Si multiplicamos $(p \supset q)$ por $(p \supset r)$ mediante la operación $(\cdot)$, obtenemos la siguiente composición ternaria:

$$(p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}) \cdot (q \cdot r \vee \bar{q} \cdot r \vee \bar{q} \cdot \bar{r}) =$$
$$= p \cdot q \cdot r \vee \bar{p} \cdot q \cdot r \vee \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot r \vee \bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}$$

[15] En particular, no necesitamos distinguir una sintaxis y una semántica, puesto que las operaciones que nuestros sujetos emplean corresponden de entrada a significaciones.

Ahora bien, de entrada se ve que estos 4 tríos contienen $(p \cdot r \vee \bar{p} \cdot \cdot r \vee \bar{p} \cdot \bar{r})$, por lo tanto $(p \supset r)$ y proporcionan pues la conclusión buscada, que por otra parte puede calcularse de un modo aun más directo.[16]

Pero ¿a qué corresponden estos cálculos en la mente del sujeto que no dispone ni de símbolos ni de álgebra logística? En el caso particular, corresponden simplemente a la conciencia de la transitividad de las implicaciones. En efecto, por una parte el sujeto posee la noción de las implicaciones que expresa, por ejemplo, mediante las palabras: "Si x entonces y" (sin que la recíproca sea verdadera) o "si y entonces z" (sin reciprocidad). Ahora bien, si está en condiciones de expresar esta noción, que se basa en una composición de los casos $x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y$, etc., y en una expresión simplemente verbal de estas combinaciones, no resulta aventurado atribuirle el poder de agrupar estas implicaciones en una sola sucesión: "si x provoca a y y si y provoca a z, entonces x provoca a z", puesto que las mismas nociones y las mismas combinaciones que corresponden a simples expresiones verbales bastan para la construcción de semejante transitividad (por otra parte, la transitividad se adquiere desde el nivel concreto en lo que concierne a la seriación de las relaciones asimétricas transitivas: $A<B$, $B<C$, por lo tanto, $A<C$). Decir que el razonamiento equivale a un cálculo operatorio no supone pues la atribución de ningún poder misterioso a la inteligencia del sujeto desde el momento en que se admite que el acto de inteligencia equivale a la agrupación de operaciones. El único misterio (misterio que subsiste en todas las interpretaciones del razonamiento lógico) consiste en que el lenguaje basta, a partir de un cierto nivel, para permitir la expresión aproximada de combinaciones que, por otra parte, el álgebra logística traduce en símbolos abstractos.

Ahora bien, si el razonamiento consiste en un cálculo operatorio constantemente efectuado por el sujeto,[17] se sigue de ello que el conjunto de las operaciones a su disposición constituye una estructura algebraica susceptible de actuar como totalidad (por sus leyes de estructuras) además de las acciones respectivas que son el resultado de las operaciones particulares. Comprobamos que la elaboración de una combinatoria supone la elaboración de un "conjunto de partes" y, en consecuencia, de una estructura de *reticulado* con las leyes generales de reciprocidad que la caracterizan en cuanto a la

[16] Recordemos que $p \supset q$ también puede escribirse $p = p \cdot q$. Por otra parte q equivale en este caso a $q = p \vee \bar{p} \cdot q$. Se tiene entonces la siguiente sucesión de equivalencias (donde $\equiv$ significa la identidad de dos simbolismos):

1) $(p \supset q) \equiv (p = p \cdot q)$
2) $(q \supset r) \equiv (q = q \cdot r)$
3) $q = p \vee \bar{p} \cdot q$ (en virtud de 1)
4) $p = p \cdot q \cdot r$ (por el producto de 1 y de 2)
5) $p = [(p \cdot r) \cdot (p \vee \bar{p} \cdot q)] = p \cdot r$ (por el producto de 3 y de 4)
6) $(p = p \cdot r) \equiv (p \supset r)$

Por lo tanto de 1) y de 2) surge la propiedad 6) o sea $p \supset r$.

[17] Y susceptible de reducirse únicamente a las operaciones $(\vee)$, $(\cdot)$, $(=)$ y N.

estructura de *grupo*: se manifiesta también en el empleo de las 16 operaciones binarias por el papel sistemático de la negación o inversión (por ejemplo en el hecho de que una asociación $p \cdot \bar{q}$ se comprenda como una contradicción a la relación $p \supset q$; etc.).

Pero, ¿tenemos que buscar más lejos aún? ¿Puede reconocerse en el funcionamiento psicológico espontáneo de estas operaciones y, en particular, en los razonamientos constructivos a los que conducen, la intervención de esta estructura fundamental que es el grupo de las 4 transformaciones directa, inversa, recíproca e inversa de la recíproca? [18] Creemos que en efecto es así, pero, para mostrarlo, se trata ahora de examinar lo que puede llamarse los esquemas operatorios en oposición con las operaciones particulares que las constituyen.

§ 5. LOS ESQUEMAS OPERATORIOS CON ESTRUCTURA FORMAL

Resulta evidente que el funcionamiento psicológico de las 16 operaciones binarias supone una organización o una estructura de conjunto, puesto que estas operaciones constituyen un sistema en la propia mente del sujeto (y que este sistema logra, de entrada o no, la adquisición de las propiedades del grupo *INRC*, sobre el que volveremos). Por otra parte, esta estructura presenta algunas formas de reversibilidad que aseguran una compensación continua de las transformaciones en juego y caracterizan por ello un cierto estado de equilibrio. Ahora bien, un estado de equilibrio es un sistema que implica transformaciones virtuales, puesto que la suma algebraica de estas transformaciones expresa precisamente esta compensación de las modificaciones posibles en los sentidos positivos y negativos. Desde el punto de vista psicológico significa que, junto a operaciones efectuadas realmente por el sujeto, se encuentran implicadas, en el sistema mismo, un conjunto de transformaciones posibles que pueden manifestarse o permanecer latentes según las condiciones (véase § 2 del cap. XVI).

Esta situación plantea precisamente el problema de los esquemas operatorios, vale decir, de las nociones que el sujeto puede construir a partir del nivel formal, cuando se encuentra ante ciertos datos, pero cuya adquisición no manifiesta fuera de estas condiciones. El pensamiento formal, desde su aparición en el estadio III B e incluso a menudo en el III A, señala su presencia no sólo con el empleo constante de las 16 operaciones proposicionales binarias y de algunas combinaciones ternarias o superiores que de ellas derivan, sino también con la elaboración esporádica de un cierto número de nociones o esquemas, inaccesibles al nivel concreto porque su organización supone las operaciones precedentes. Estos esquemas operatorios consisten en nociones u operaciones espaciales (matemáticas y no exclusivamente

[18] El grupo *INRC*.

lógicas) cuya necesidad el sujeto puede experimentar para la solución de algunos problemas y que logra entonces elaborar de modo espontáneo (o simplemente logra comprender, vale decir, reelaborar, en el caso en que la enseñanza escolar se refiera a estas nociones) mientras que hasta entonces era incapaz de hacerlo.

Estamos pues ante un fenómeno psicológico de gran interés: la aparición sincronizada de un conjunto de nociones u operaciones cuyo parentesco no se percibe de entrada (porque no son interdependientes como lo son las 16 operaciones binarias) y que, no obstante, son solidarias entre sí en virtud de vínculos más profundos cuyas raíces deben buscarse en la estructura combinada del reticulado y el grupo; estructura que corresponde al pensamiento formal.

Si no se discierne de entrada su parentesco, es porque el sujeto construye estos esquemas operatorios de tal manera que en apariencia resulta análoga a aquella con la que elabora las diversas nociones que le son útiles: mediante las operaciones proposicionales, pero en función de las necesidades imprevisibles resultantes de las condiciones de la experiencia y la naturaleza de los problemas. Por ejemplo, durante las experiencias descriptas en los caps. I a VI, los sujetos del estadio III elaboraron, gracias a sus operaciones formales, nociones como las leyes de la flexibilidad, las oscilaciones del péndulo, la igualdad entre los ángulos que intervienen en los rebotes de una bola, la flotación de los cuerpos, etc. Ahora bien, ninguna de estas nociones es formal en su estructura misma: es cierto que sólo aparecen en el nivel formal porque se tuvo que emplear operaciones formales para descubrirlas o construirlas; pero no son formales en tanto nociones, puesto que su naturaleza es de carácter sobre todo experimental o porque participan de la geometría de los cuerpos físicos. Sin embargo, entre las nociones u operaciones que el sujeto aparentemente construye de la misma manera, deduciéndolas o inventándolas durante la búsqueda de y posteriormente a las combinaciones experimentales, existen algunas que vuelven a aparecer en las situaciones más variadas o cuando se presentan los problemas más diversos y que, en el análisis, muestran caracteres un poco diferentes.

Estas son, por ejemplo, la noción de las proporciones que intervienen en problemas que no guardan relación alguna de contenido entre sí, la noción del equilibrio entre la acción y la reacción, la de probabilidad combinatoria o también las operaciones matemáticas de combinaciones, etc. Estas nociones tienen entonces los tres caracteres comunes siguientes: 1) son más generales que las precedentes y constituyen así esquemas operatorios susceptibles de aplicaciones variadas más que nociones en sentido estricto; 2) desde el punto de vista de su formación psicológica, se las descubre menos en los objetos que se las deduce o abstrae a partir de las estructuras del sujeto; 3) todas presentan algún parentesco con las estructuras del reticulado y del grupo y varias de ellas con el grupo de las inversiones y reciprocidades (*INRC*).

Estos son los tres caracteres que constituyen el interés de la aparición simultánea de estos esquemas en los comienzos del estadio formal (III A o B): en la medida en que estos esquemas operatorios participan de la estructura de conjunto que constituye la forma de equilibrio propio del pensamiento formal, uno puede preguntarse, en efecto, si la capacidad de construir estos esquemas (capacidad que, repitámoslo, no se manifiesta necesariamente sino que se actualiza cuando lo exige la naturaleza de los problemas que deben resolverse) no constituye una de las manifestaciones de estas transformaciones virtuales inherentes a toda forma de equilibrio, en particular, cuando esta forma es una estructura tan compleja como el grupo y el reticulado sumados que caracterizan al sistema de las operaciones formales.

I. *Las operaciones combinatorias.* — El "conjunto de las partes" que puede extraerse de un conjunto de 4 elementos $p \cdot q$, $p \cdot \bar{q}$, $\bar{p} \cdot q$ y $\bar{p} \cdot \bar{q}$ considerados 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, los cuatro juntos o ninguno, constituye un sistema de combinaciones $2^{2^2} = 16$, esta combinatoria es la que permite engendrar las 16 operaciones binarias (del mismo modo que las $16 \times 16 = 256$ operaciones ternarias, etc. Ahora bien, nunca encontramos un sujeto del nivel III, ni un adulto que no fuera un lógico, que efectivamente haya calculado estas 16 combinaciones posibles ni que haya tomado conciencia de modo explícito de la existencia de tal combinatoria. La intervención reflexionada y razonada de estas combinaciones es tan extraña al sujeto que comienza a razonar formalmente como lo son las leyes de la armonía para el niño o el cantante popular que retienen una melodía o silban un aire improvisado.

Ahora bien, sucede que en la experiencia de los colorantes (cap. VII), en la que se le da a los sujetos 4 frascos que contienen líquidos diferentes y un cuentagotas con un quinto líquido, pero sin consigna alguna respecto de las combinaciones, precisamente es en el nivel III A cuando comienzan a efectuar de modo espontáneo combinaciones sistemáticas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, y 4 a 4.

Además, como lo hemos mostrado en otra parte [19] si se les da a los niños una cierta cantidad de fichas de colores diferentes y esta vez se les pide, por medio de una consigna explícita, que construyan todas las parejas posibles con las fichas tomadas de los 5 ó 6 montones, de nuevo sólo en el estadio II A se resuelve el problema mediante un método sistemático, mientras que en el nivel concreto, las combinaciones permanecen incompletas y se obtienen mediante ensayos y errores. En cuanto a las permutaciones [20] (6 permutaciones entre 3 fichas de colores diferentes y 24 permutaciones entre fichas de 4 colores) y los ordenamientos [21] (encontrar todos los números que puedan construirse con 2, 3, 4... cifras), sólo en el nivel III B se adquieren

[19] *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, cap. VII.
[20] *Ibid.*, cap. VIII.
[21] *Ibid.*, cap. IX.

estas operaciones de modo sistemático, vale decir, sin una formulación explícita de su expresión matemática, pero con una ejecución que implica un método exhaustivo.

Existen entonces 4 soluciones para explicar estas convergencias entre la aparición espontánea de las operaciones combinatorias matemáticas (no enseñadas en la escuela a las edades consideradas) y la constitución también espontánea de la combinatoria proposicional. En primer lugar, esto sólo puede evidenciar una simple coincidencia. En segundo lugar, puede considerarse al cálculo (matemático) de las combinaciones como la adquisición primitiva y la combinatoria proposicional como una aplicación secundaria de este cálculo. En tercer lugar, puede enfocarse, por el contrario, a la combinatoria proposicional como la adquisición primitiva y a las combinaciones matemáticas como aplicaciones derivadas. Por último, se puede admitir que las clases de combinatorias constituyen un solo y mismo mecanismo desde el punto de vista del funcionamiento psicológico de las operaciones en el pensamiento de nuestros sujetos.

Nos parece que la primera solución debe descartarse por razones de probabilidad. Se examinaron muchos sujetos (más de 1500 para los problemas de inducción experimental y, por lo menos, 300 para las operaciones combinatorias de naturaleza matemática), y el sincronismo de los procesos descriptos no podría atribuirse al azar. Por otra parte, resulta difícil admitir que dos clases de adquisiciones emparentadas, una lógica y la otra matemática, se observen a las mismas edades sin que se establezca una comunicación entre los correspondientes casilleros en el cerebro o en el pensamiento, si existen casilleros.

La segunda solución, por una parte, resulta poco verosímil desde el punto de vista genético; por la otra, sólo aparentemente presenta una clara definición. En primer lugar, contradice los datos genéticos habituales porque, por lo general, una operación matemática es más compleja que la operación lógica correspondiente. La diferencia entre las operaciones matemáticas de combinación y una combinatoria lógica reside, en efecto, en el hecho de que las primeras se refieren a simples unidades, mientras que la segunda se refiere a objetos cualitativos entre los cuales ninguno es del todo equivalente a otro: ahora bien, la unidad es más abstracta que el objeto cualitativo, puesto que supone una eliminación previa de todas las cualidades.[22]

[22] En el caso de la combinatoria proposicional, los elementos son las asociaciones $p \cdot q$, $p \cdot \overline{q}$, $\overline{p} \cdot q$ y $\overline{p} \cdot \overline{q}$ que no son equivalentes entre sí, incluso son cualitativamente muy distintas. Es cierto que entonces se trata de asociaciones entre enunciados que se refieren a objetos o acontecimientos cualitativos, lo que implica un grado mayor de abstracción. Pero, recordamos que esta combinatoria proposicional nació a partir de una clasificación generalizada de los elementos del cuadro de doble entrada propio de las agrupaciones concretas multiplicativas: por sus orígenes, esta combinatoria se refiere pues a simples asociaciones de objetos cualitativos. En el caso de los colorantes, se concibe que los elementos dados pueden ser cualitativamente diferentes, pero de hecho se los percibe como indiscernibles, salvo por sus números de orden: se trata entonces en parte de una combinación de unidades. Por último, en el caso de las fichas

Resulta pues dudoso que la formación de las operaciones matemáticas de combinaciones preceda a la combinatoria lógica. Pero, incluso si así fuera, ¿qué significaría entonces la hipótesis según la cual esta última resultaría de una aplicación de las operaciones matemáticas previas? En efecto hay que comprender que nuestros sujetos no descubrieron y no conocen las fórmulas matemáticas del cálculo de las combinaciones. Lo que encontraron es un procedimiento operatorio que equivale prácticamente a la aplicación de la fórmula, pero que en realidad constituye un simple método de acción y no un conocimiento reflexionado y formulable. Decir que este procedimiento que se aplica en primer lugar a objetos cualesquiera y que luego se generaliza al pensamiento lógico y a sus operaciones deductivas no presenta pues una clara significación, puesto que el pensamiento lógico ya se halla presente en las operaciones del primer tipo. El único problema consiste pues en saber si la combinatoria naciente se refiere en primer lugar a objetos-unidades o a objetos cualitativos, pero, volvemos a repetirlo, muchas analogías (formación del número comparada con la de las clases y relaciones, etc.) hablan en favor de esta última solución.

¿Tenemos pues que invertir los términos de la segunda solución y adoptar la tercera? En cierto sentido sí, pero puesto que también la combinación lógica se construye en los actos y no se reflexiona en el pensamiento, esta tercera solución no difiere esencialmente de la cuarta. En efecto, ¿qué significa el empleo de la combinatoria proposicional para un sujeto que se encuentra en vía de elaboración de sus estructuras formales? Simplemente significa que, ante hechos que tiene que explicar, combina sus relaciones cualitativas según todas las combinaciones que le son accesibles (y sin saberlo alcanza un sistema completo en el caso de las combinaciones n a n de las asociaciones binarias). Ahora bien, ante objetos que el sujeto tiene que combinar no hace otra cosa, pero, a veces, a la combinación cualitativa (que es una clasificación de las clasificaciones) se le suma una enumeración de unidades; en lo referente a las permutaciones (que son seriaciones de seriaciones) ocurre lo mismo, etcétera.

Todo sucede pues como si las operaciones combinatorias constituyesen un esquema operatorio bastante general a partir de un cierto nivel de desarrollo (III A): un esquema, vale decir, una manera de proceder o un método, que a veces se adopta de modo espontáneo e incluso en ausencia de una decisión consciente o explícita, y a veces se emplea de modo intencional ante problemas cuya solución exige un cuadro sistemático de combinaciones. Este esquema es de naturaleza formal y no concreta, puesto que comproba-

---

la situación también es mixta: cada elemento es una unidad, pero elegida dentro de un conjunto cualitativamente definido (colores). No resulta posible, si uno se atiene a los pocos ejemplos de combinatorias que hemos citado, decidir cuáles son más simples y cuáles más complejos: si la combinatoria proposicional es puramente lógica, presenta una dificultad variable según los datos presentados; en cuanto a los otros dos casos, presentan una mezcla de estructuras lógicas y matemáticas y no pueden compararse sin equívoco con los primeros.

mos que la diferencia esencial entre las agrupaciones concretas y la lógica del estadio III se debía precisamente a la ausencia o presencia de tal carácter. Resulta inútil, por último, recordar en qué se relaciona con la estructura del reticulado y la construcción del "conjunto de las partes". No obstante, quisimos volver sobre las operaciones combinatorias para convertirlas en el primer "esquema operatorio" considerado en este capítulo: en efecto, las operaciones combinatorias no pertenecen al conjunto de los operadores proposicionales (§ 3) y no derivan de ellos; por el contrario, constituyen la condición previa de su elaboración, lo cual es muy diferente, y, por otra parte, pueden generalizarse a nuevas situaciones desde el momento en que sirven para esta elaboración. Estos diversos caracteres psicológicos muestran así que las operaciones combinatorias sumergen su raíz en una realidad más profunda: la estructura de la cual estos operadores proposicionales surgieron y estas operaciones expresan ciertas leyes de totalidad de esa estructura.

II. *Las proporciones.* — Si las operaciones combinatorias expresan ciertas leyes de totalidad propias del reticulado constituido por "el conjunto de las partes", el esquema de las proporciones establece, en cambio, la transición entre los esquemas provenientes del reticulado[23] y los que participan de la estructura de grupo y, sobre todo, del grupo de las inversiones y reciprocidades (*INRC*).

Puesto que las proporciones matemáticas simplemente consisten en dobles relaciones $x/y = x'/y'$ el problema psicológico planteado por la formación de esta noción es el comprender por qué razón no se constituye ya desde el nivel de las operaciones concretas. En efecto, el sujeto de este nivel ya consigue construir fracciones o relaciones numéricas, también consigue de modo natural igualar cantidades dispuestas de modo diferente. Por una parte, desde el punto de vista cualitativo existe ya desde el nivel concreto una operación que Spearman llamó la "educción de los correlatos" y equivalente a presentar de una manera que anticipa a las proporciones, las vinculaciones inherentes a un cuadro de doble entrada: por ejemplo "Roma es a Italia como París es a Francia". Se puede entonces preguntar por qué los sujetos de 8 a 11 años no logran descubrir la igualdad de dos fracciones, que constituyen una proporción, y por qué es necesario esperar el nivel de las operaciones formales. En efecto, no sólo comprobamos en varias ocasiones, durante las experiencias precedentes (caps. XI a XIV) que la noción de las proporciones no se adquiere para nada antes del estadio III A, sino que además ya nos lo había demostrado el análisis de esta noción en los dominios más diversos (espacio, velocidades, probabilidades, etc.). Invocar los programas escolares (ya que esta vez se trata de una noción enseñada en la escuela) no bastaría en absoluto para resolver el problema ya que, por una parte, nos encontramos con sujetos que construían esta noción antes de haberla aprendido y, por la otra, si pudiera comprendérsela más temprano

[23] Véase la *Observación*, pág. 177 (al final del cap. XIII).

¡puede tenerse la seguridad de que los programas escolares adelantarían las fechas de adquisición! Hay que buscar entonces la explicación para esta comprensión tardía en la estructura misma de las operaciones accesibles a los sujetos de los diversos niveles.

Ahora bien, como todos los otros esquemas operatorios aquí tratados, el esquema de las proporciones presenta dos aspectos, uno lógico y el otro matemático. En su forma lógica general una proporción es la equivalencia de las relaciones existentes entre dos expresiones α y β y las relaciones dadas entre otras dos expresiones γ y δ. Por definición tendremos entonces:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ si } (1)\ \alpha.\delta = \beta.\gamma \quad (3)\ \alpha.\bar{\beta} = \gamma.\bar{\delta} \text{ y } \bar{\alpha}.\beta = \bar{\gamma}.\delta$$
$$(2)\ \alpha \vee \delta = \beta \vee \gamma \quad (4)\ \alpha.\bar{\gamma} = \beta.\bar{\delta} \text{ y } \bar{\alpha}.\gamma = \bar{\beta}.\delta$$

Por ejemplo:

$$\frac{p}{q} = \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \text{ porque } (1)\ p.\bar{p} = q.\bar{q}\ (= 0)\ (2)\ p \vee \bar{p} = q \vee \bar{q}\ (= p \barwedge q)\ (3)\ p.\bar{q} = \bar{q}.\bar{\bar{p}} \text{ et } p.\bar{\bar{q}} = q.\bar{\bar{p}}$$

Definidas de este modo, las proporciones lógicas corresponden a la vez a las estructuras del grupo de las inversiones y reciprocidades (*INRC*) y del reticulado. En efecto, una expresión proposicional dada (α) es a su recíproca (β) como la negación de ésta (γ) es a la negación de la primera (δ):

$$\frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{C\alpha}{N\alpha}$$

Por ejemplo:

$$\frac{p \vee q}{p/q} = \frac{p \cdot q}{\bar{p} \cdot \bar{q}} \text{ o } \frac{p \supset q}{q \supset p} = \frac{\bar{p} \cdot q}{p \cdot \bar{q}}, \text{ etc., que verifican las propiedades (1) a (4)}$$

Por otra parte, la conjunción (parte común o "límite inferior") de dos elementos cualesquiera de un reticulado proposicional, por ejemplo p y q es a uno de ellos como el otro a su disyunción (suma o "límite superior"):

$$\frac{p \cdot q}{p} = \frac{q}{p \vee q} \text{ cuya forma completa es } \frac{p \cdot q}{p\,[q]} = \frac{q\,[p]}{p \vee q}$$

La noción de las proporciones lógicas es pues inherente a la estructura de conjunto que parece dominar las adquisiciones propias del nivel de las operaciones formales (estadio III). Entonces puede preguntarse si la elaboración del esquema operatorio de las proporciones, en su forma matemá-

tica como en su forma lógica, no deriva de estas proporciones lógicas, cuya aparición tardía se explicaría así por su conexión necesaria con las estructuras de conjunto del estadio formal. En efecto, en todas partes en que interviene un sistema de proporciones, antes de alcanzar el cálculo de las relaciones numéricas, el sujeto comienza por despejar una especie de esquema anticipatorio de proporcionalidad cualitativa y este esquema, en primer lugar simplemente lógico, conduce luego al descubrimiento de las proporciones métricas. Por ejemplo, en el caso de la balanza, el sujeto comienza por descubrir que un cierto aumento del peso puede compensarse con un cierto aumento de la distancia a partir del centro: en efecto, cuando coloca un peso liviano a una gran distancia y un peso pesado a una pequeña distancia obtiene el equilibrio y de ahí extrae una proporcionalidad de los 4 valores. Sin embargo, tanto esta compensación como esta proporcionalidad son, en primer lugar, exclusivamente cualitativas. Si representamos con p al enunciado de un aumento del peso y con q al de un aumento de la distancia y con $\bar{p}$ y $\bar{q}$ a las disminuciones correspondientes, el sujeto simplemente empieza pensando en las siguientes relaciones:

$$p = R\bar{q} \quad y \quad \frac{p}{\bar{q}} = \frac{q}{\bar{p}} \text{ de donde } p \cdot \bar{p} = q \cdot \bar{q} \quad y \quad p \vee \bar{p} = q \vee \bar{q}$$

vale decir, que el aumento del peso es a la disminución correspondiente de la distancia como un aumento de la distancia es a la disminución correspondiente del peso (y ello independientemente todavía de toda medición).

Este parece ser el esquema cualitativo del cual parte el sujeto para el descubrimiento de la proporcionalidad; esencialmente se basa en la reciprocidad de los pesos y las distancias que la experiencia le sugiere: puede anularse un aumento de peso suprimiendo el peso añadido ($Np = \bar{p}$) pero también puede compensarse este aumento disminuyendo la distancia ($p = R\bar{q}$) o ($Rp = \bar{q}$). La proporción precedente puede también entonces escribirse del modo siguiente: [24]

$$\frac{p}{q} = R\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \text{ de donde } p \cdot \bar{q} = R(\bar{p} \cdot q)$$

y por lo general el razonamiento del sujeto se presenta bajo esa forma: aumentar el peso y disminuir la distancia ($p \cdot \bar{q}$) equivale a lo mismo ($R =$ = compensa) que disminuir el peso y aumentar la distancia.

Una vez en posesión de estos dos esquemas el sujeto puede luego insertar los valores numéricos que sus mediciones le proporcionan, ya que

[24] En efecto, si $p \cdot \bar{q} = R(\bar{p} \cdot q)$ también se tiene $p \cdot q = R(\bar{p} \cdot \bar{q})$ y $p \cdot \bar{p} = R(p \cdot \bar{q})$, o sea $(0 = R0)$, ya que $p \cdot C\bar{p} = p \cdot \bar{p}$ y $q \cdot C\bar{q} = q \cdot \bar{q}$ puesto que $Cp = p$ y $C\bar{p} = \bar{p}$.

a cada uno de los dos le corresponde una proporción simétrica (véanse las props. 13 y 14 del cap. XI):

$$\frac{p}{q} = \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \quad \text{corresponde} \quad \frac{nx}{ny} = \frac{n : y}{n : x}$$

$$\frac{p}{q} = R\,\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \quad \text{corresponde} \quad \frac{nx}{ny} = \frac{x : n}{y : n}$$

De este modo, la adquisición del esquema operatorio de las proporciones numéricas o métricas supone anticipaciones cualitativas bajo forma de compensaciones mediante equivalencias y proporciones lógicas; éstas participan a su vez de la estructura de conjunto de la que derivan las operaciones proposicionales. Esta sería entonces la explicación de la aparición tardía de la noción de proporciones y del sincronismo observado entre esta aparición y la de las operaciones combinatorias y otros esquemas operatorios que analizaremos. Sin duda alguna parecería que el esquema de las proporciones puede obtenerse mediante la cuantificación numérica a partir de un sistema de clases multiplicativas, y por cierto el empleo de las "educciones de correlatos" que se mencionaron anteriormente lo prepara para ello. Sin embargo, el análisis de esta estructura elemental muestra precisamente que le faltan aún las propiedades generales características de las proporciones proposicionales.[25]

III. *La coordinación de dos sistemas de referencia y la relatividad de los movimientos o las velocidades.* — El tercer esquema operatorio no se refiere a experiencias presentes en esta obra, sino a experiencias anteriores.[26] No obstante, queremos aquí recordarlas para mostrar el carácter general del fenómeno de los esquemas operatorios formales y para prepararnos a la comprensión del ejemplo que aparecerá luego (equilibrio mecánico), que corresponde a la misma estructura.

Tomemos un caracol que se desplaza sobre un pequeño tablón, el que puede moverse en el mismo sentido del movimiento del caracol o bien en sentido inverso. Los sujetos que pertenecen al nivel de las operaciones concretas comprenden muy bien que el caracol puede desplazarse de izquierda

[25] Por ejemplo, en el correlato "los pelos son a los Mamíferos como las plumas son a los Pájaros", llamemos A_1 a los órganos epidérmicos que incluyan a los pelos y las plumas y A'_1 a los otros órganos; y llamemos A_2 a los órganos de los Mamíferos y A'_2 a los de los Pájaros (puesto que $A_1 + A'_1 = B_1$ y $A_2 + A'_2 = B_2$). Se tiene entonces el correlato $A_1A_2/B_1A_2 = A_1A'_2/B_1A'_2$. Pero no puede concluirse que $(A_1A_2 + B_1A'_1) = (B_1A_2 + A_1A'_2)$ (vale decir, los pelos de los Mamíferos más los órganos de los Pájaros = los órganos de los Mamíferos más las plumas de los Pájaros), etc. Las similitudes de las relaciones se acercan en cambio más a las proporciones proposicionales, pero a condición de no referirse sino a relaciones idénticas entre sí.

[26] Véase Piaget, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, París, Presses Universitaires de France, 1946, caps. V y VIII.

a derecha, y luego volver de derecha a izquierda mediante una operación inversa que anula la anterior. Asimismo, comprenden que si el caracol se mantiene quieto, un movimiento de izquierda a derecha del tablón lo conducirá al mismo punto (en relación con referencias exteriores) que si hubiera caminado solo y que el movimiento inverso lo volverá a llevar al punto de partida. Pero hay que esperar el nivel de las operaciones formales para que aparezcan las previsiones correspondientes a estas dos clases de movimientos simultáneos, ya que en este caso se trata de coordinar entre sí dos sistemas de referencia, uno móvil y el otro inmóvil. Por ejemplo, una de las dificultades consiste en comprender que un movimiento de izquierda a derecha del caracol pueda ser compensado con un desplazamiento de derecha a izquierda del tablón; en este caso el caracol se queda entonces en su lugar (en relación con el sistema de referencia inmóvil) sin haber realizado desplazamiento inverso alguno.

Asimismo, hicimos desfilar a un ritmo y una velocidad uniformes una cierta cantidad de pequeños ciclistas ante un observador, y nuestro problema fue averiguar si vería más ciclistas, en un mismo tiempo, permaneciendo en su lugar frente a la puerta, caminando en sentido inverso al de los ciclistas o desplazándose en la misma dirección que ellos. De nuevo el problema sólo se resuelve en el estadio III y por las mismas razones. Pero en este nivel el sujeto muestra una adecuada comprensión de la relatividad: por ejemplo, un sujeto nos dijo que si el observador se mueve hacia los ciclistas "sucede como si no se moviera y como si los ciclistas fuesen más rápido".

En realidad, en estos problemas la dificultad consiste en distinguir y componer dos clases de transformaciones: 1) *la anulación* (por ejemplo cuando el caracol vuelve de B hacia A después de haber ido de A hacia B), y 2) *la compensación* (por ejemplo cuando el caracol se mueve de A hacia B mientras que se desplaza al tablón de B hacia A). Se trata pues de la coordinación de dos sistemas que suponen cada uno una operación directa y una inversa, pero uno de los sistemas se encuentra respecto del otro en una relación de compensación o simetría.

Ahora bien, se percibe de inmediato que esta coordinación es realizada precisamente por el grupo *INRC*, puesto que N es la inversa de I y C la de R, mientras que R representa respecto de I una relación de simetría o compensación (reciprocidad). El problema consiste pues en distinguir la inversión N de la reciprocidad R al mismo tiempo que coordinarlas, y por ello su solución no puede encontrarse sino en el nivel formal gracias a la intervención de un esquema basado en el grupo *INRC*.

En efecto, si llamamos I al movimiento de A hacia B realizado por el caracol, N será su movimiento de B hacia A; R será el movimiento de B hacia A realizado por el tablón (por lo tanto, $R = C$ de N) y C será el movimiento de A hacia B también realizado por el tablón (por lo tanto, C de $I = N$ de R). Pero resulta inútil desarrollar más profundamente este esquema de razonamiento cuyo equivalente analizaremos ahora a propósito del equilibrio mecánico.

IV. *La noción de equilibrio mecánico.* — Cuando los diversos procesos en juego en un sistema en equilibrio mecánico pueden comprenderse directamente gracias a la configuración perceptiva, como sucede en el caso de una balanza con platillos fijos, donde las distancias a partir del eje no varían y donde los elementos en equilibrio tienen la misma naturaleza (pesos) y actúan de modo visible en sentidos contrarios entre sí, el sujeto no tiene gran dificultad en captar esa igualdad de sentidos opuestos y logra hacerlo ya desde el estadio concreto. Pero en este caso no puede hablarse de un esquema general del equilibrio, ello resulta claro desde el momento en que se coloca al sujeto ante un dispositivo cuyos elementos en equilibrio ya no tienen la misma naturaleza y, sobre todo, cuya acción es la única visible mientras que la reacción permanece invisible, salvo en cuanto a sus resultados. La tardía aparición del principio de la igualdad entre la acción y la reacción en la historia de las ciencias, desconocido por los griegos, constituye un ejemplo suficiente de la existencia de esta dificultad. Asimismo, desde el punto de vista individual, el esquema general del equilibrio no se constituye antes del nivel de las operaciones formales; se trata ahora de comprender por qué es así.

Existe para ello una primera razón muy natural: la noción de equilibrio, que supone una compensación entre las transformaciones virtuales del sistema, constituye un ejemplo típico de nociones que establecen una conexión entre lo real y lo posible y requiere entonces la constitución previa del pensamiento formal, instrumento adaptado especialmente para el tratamiento de los posibles. Pero si sólo existiera esta razón, podría considerarse a la noción de equilibrio como una de aquellas nociones que presuponen las operaciones proposicionales como condiciones de su descubrimiento sin que por ello su estructura misma sea formal.

A la primera razón se le suma pues una segunda que esta vez conduce a la comparación del esquema del equilibrio con los esquemas operatorios de combinación y proporción, de los que hemos examinado por qué razón son formales en su estructura y no sólo en cuanto a los medios utilizados en su constitución. La noción de equilibrio supone, en efecto, simultáneamente la distinción y la coordinación íntima de las dos formas complementarias de la reversibilidad: la inversión y la reciprocidad. En un estado de equilibrio, hay inversión siempre que se modifiquen los elementos del sistema por una adjunción o una supresión, por lo tanto, cuando se producen transformaciones cuya forma de compensación es la operación nula. Por otra parte, hay reciprocidad cuando las transformaciones de sentidos contrarios no se anulan (la operación nula significa la ausencia de acciones) sino que sólo se compensan mediante la equivalencia: la igualdad de la acción y la reacción constituyen la forma general de esta compensación por reciprocidad. Además, en este caso la inversión y la reciprocidad son siempre solidarias entre sí: al añadir o suprimir ciertos elementos en una parte del sistema (inversión), se modifican al mismo tiempo las relaciones de reciprocidad entre esta parte del sistema y las que lo equilibran; para modificar, en retorno, a la equivalen-

cia (reciprocidad) entre los elementos que actúan en sentidos contrarios, hay que suprimir o añadir algo, éste constituye una transformación por inversión.

Ahora bien, esta interdependencia de las transformaciones por inversión y reciprocidad implica una estructura formal. En efecto, como ya lo hemos visto (§ 1), estas dos formas de la reversibilidad pueden reunirse en un sistema único sólo en el plano de las operaciones formales. Contrariamente a las agrupaciones elementales que provienen de la inversión (clases) o bien de la reciprocidad (relaciones), todas las operaciones proposicionales suponen una inversa (N), una recíproca (R) y una correlativa (C), vale decir, la inversa de la recíproca. Con la transformación idéntica (I), estas transformaciones constituyen entonces un grupo conmutativo tal que:

$$NR = C \; ; \; CR = N \; ; \; CN = R \text{ y } NRC = I$$

Ahora bien, precisamente el sujeto emplea las 4 transformaciones de este grupo para explicar el equilibrio de un sistema mecánico, ya que la comprensión de este sistema supone, como se acaba de ver, que el sujeto consiga a la vez diferenciar y coordinar las modificaciones por inversión y por reciprocidad. Esta constituye una situación muy instructiva desde el punto de vista psicológico. Por supuesto, el sujeto lo ignora todo acerca de la noción de "grupo" como objeto de reflexión teórica, pero ya desde el nivel concreto, utiliza en sus operaciones estructuras elementales de grupo (por ejemplo para la composición de las adiciones y sustracciones aritméticas que constituyen un grupo de dos transformaciones). Cuando en el nivel formal logra interpretar sistemas mecánicos en equilibrio, se esfuerza entonces por distinguir y coordinar las transformaciones en juego, en tanto modificaciones objetivas de la realidad física, y también la estructura, en virtud de las leyes de su pensamiento, de acuerdo con un modelo de grupo. Ahora bien, este modelo operatorio, que le corresponde a todo equilibrio, corresponde también en consecuencia, sin que el sujeto lo sospeche, al equilibrio interno de sus propias operaciones lógicas, de tal modo que el grupo de las inversiones y reciprocidades (grupo $INRC$) interviene de hecho dos veces en la explicación de un sistema mecánico en equilibrio y lo hace en dos planos muy diferentes: por una parte, gobierna a las operaciones proposicionales que el sujeto utiliza para describir y explicar lo real, y constituye así una estructura de conjunto interior a su pensamiento, estructura de la cual el sujeto no toma por supuesto conciencia alguna; pero, por otra parte, se proyecta a este grupo por la práctica misma hacia afuera, a los fenómenos que deben interpretarse (puesto que estos fenómenos, en este caso particular, constituyen un sistema cuyo equilibrio representa precisamente el problema que tiene que resolverse) y engendra así el esquema operatorio que el sujeto emplea en estas situaciones para explicar las modificaciones físicas y su coordinación.

Es así como, en la experiencia del pistón que ejerce su presión sobre un líquido (cap. X), las 4 transformaciones que deben distinguirse son las si-

guientes: 1) en primer lugar está (transformación directa) la acción del peso del pistón y de los pesos que pueden sumársele al peso del pistón; 2) en retorno se puede (transformación inversa) quitarle pesos al pistón o incluso eliminarlo; 3) por otra parte, tiene que considerarse (transformación recíproca) la reacción del líquido como una resistencia que depende de su cantidad y densidad, y 4) por último, se puede (inversa de la recíproca) disminuir la cantidad del líquido o disminuir su densidad reemplazándolo por un líquido menos denso. Ahora bien, el examen de los sujetos nos mostró que para ellos la dificultad principal consiste en comprender que la masa del líquido ejerce una presión, pero orientada en sentido opuesto y no en el mismo sentido de la del pistón. La comprensión del equilibrio supone pues no sólo la de las transformaciones que desempeñan el papel directo e inverso (1 y 2), sino también la de estas modificaciones particulares constituidas por los casos 3 y 4: la resistencia del líquido (3) también es una presión, pero a la vez equivalente a la del pistón (1) y orientada en sentido contrario, de tal modo que representa una transformación recíproca y no inversa, a la vez que actúa en el mismo sentido que la transformación inversa; en cuanto a la transformación inversa de esta recíproca (4), vale decir, la disminución de la resistencia del líquido, actúa entonces en el mismo sentido que la transformación directa (1) sin por ello ser idéntica a ella.

No resulta pues exagerado considerar que la comprensión de este sistema implica a la vez la diferenciación y la coordinación (tan difíciles una como la otra y apoyándose la una sobre la otra) de 4 transformaciones isomorfas a las del grupo *INRC*: en este caso, la noción del equilibrio mecánico corresponde en efecto en un sistema operatorio cuya construcción propia en el nivel del pensamiento formal, se explica entonces por la utilización constante de las inversiones y reciprocidades en la manipulación de las operaciones proposicionales (por ejemplo $p \supset q$ transformado en $p \cdot \bar{q}$ o en $q \supset p$). Así como toda explicación causal consiste en la deducción de las modificaciones de lo real asimilándolas a las operaciones del pensamiento,[27] así la interpretación de los sistemas mecánicos mediante el esquema operatorio del equilibrio equivale a la asimilación de las modificaciones distintas y solidarias del sistema físico a las transformaciones fundamentales *INRC* sobre las que se apoya la estructura de conjunto de las operaciones formales que la inteligencia emplea para comprender este sistema.

V. *La noción de probabilidad.* — Examinemos ahora un conjunto de nociones derivadas de uno, o bien de dos simultáneamente, de los esquemas operatorios precedentes y que desempeñan un papel bastante general como para que también se las ubique dentro del conjunto de los esquemas operatorios de naturaleza formal.

La primera es la noción de probabilidad como aparece plenamente constituida en el estadio III, vale decir, desde el momento en que adquiere una

[27] Véase Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique*, tomo II, capítulo VIII, § 10.

estructura combinatoria general. Antes, cuando analizamos el desarrollo de la noción de azar,[28] habíamos comprobado que, ya en el nivel de las operaciones concretas, el descubrimiento de la indeterminación (espacio-temporal y física o lógico-aritmética), en oposición a lo operatoriamente determinado, desencadena en el sujeto el comienzo de la disociación entre lo posible, lo real y lo necesario, que en el nivel preoperatorio permanecen indiferenciados: de ahí la aparición de una primera noción de probabilidad, por medio del establecimiento de una relación entre los casos favorables y los casos posibles.[29] Pero, en el nivel concreto, la determinación de lo posible, y, en consecuencia, de lo probable, sólo se limita a los casos en que le es accesible al sujeto una composición operatoria, vale decir, los casos de composición aditiva, en oposición a las composiciones combinatorias: por ejemplo, cuando se extraen los elementos A de un conjunto B formado por dos partes $A + A'$ (de donde $A = B - A'$). De este modo lo posible concreto no es sino una prolongación de lo real, allí donde existe mezcla (azar) e indeterminación, y lo probable concreto sigue siendo relativo a las agrupaciones operatorias elementales. En el nivel formal, en cambio, lo posible adquiere la extensión que ya analizamos (cap. XVI, § 2), hasta tal punto que la deducción de los sujetos del estadio III se efectúa a partir de lo posible (hipótesis) para desembocar en lo real concebido como sector realizado del conjunto de las combinaciones posibles. De ahí que la noción de probabilidad adquiera una extensión y una precisión muy superiores: siempre constituirá la relación entre los casos favorables y los casos posibles, pero unos y otros se calcularán en función de las combinaciones, permutaciones o arreglos compatibles con los elementos dados. Por ejemplo, se lo puede comprobar cuando se trata de extraer pares o tríos de elementos dentro de conjuntos que contienen diversas variedades de acuerdo con una distribución numérica dada: allí donde los sujetos del nivel concreto fracasan porque carecen de una combinatoria, los del estadio III lo logran sin dificultad sistemática. Esta noción combinatoria de la probabilidad es la que puede entonces considerarse como un esquema operatorio de naturaleza formal, esquema cuya formación se explica naturalmente a partir de las operaciones generales examinadas en I. Resulta inútil volver a los ejemplos de actitudes probabilísticas que hemos observado en las presentes investigaciones en cuanto a las dispersiones en parte fortuitas de los resultados (véase cap. XV, en I).

VI. *La noción de correlación.* — La correlación es una noción que procede simultáneamente de la de probabilidad y de una estructura emparentada con la de las proporciones. Tomemos por ejemplo el conjunto de las 4 asociaciones posibles de base entre dos afirmaciones y dos negaciones proposicionales: $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$. Este conjunto corresponde entre otros, lo recordamos, a los 4 casilleros de un cuadro de clases multiplicativas

[28] Piaget e Inhelder, *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, París, PUF, 1951.

[29] Por ejemplo en el caso de un sorteo dentro de un conjunto de subconjuntos definidos.

de doble entrada ($A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$) accesible ya desde los inicios del nivel concreto. Ahora bien, dos de estas asociaciones posibles, $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$, si se las considera en sí mismas, expresan la equivalencia entre p y q, por lo tanto, una correspondencia término a término entre los valores en juego, en el caso de las seriaciones. En este caso se hablará de correlación positiva perfecta. Pero las otras dos asociaciones, $p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$, si se las considera en sí mismas, expresan la exclusión recíproca entre p y q, por lo tanto, una correspondencia inversa o una correlación negativa perfecta. En cambio, si se realizan las 4 asociaciones y corresponden a una igual distribución numérica de los acontecimientos enunciados por estas conjunciones proposicionales, entonces tenemos una correlación nula.

Ahora bien, cuando se trata de evaluar si existe o no una relación entre los hechos descriptos por p y q, en caso de dispersión irregular, por lo tanto, en el caso de una mezcla de interferencias fortuitas y causalidad subyacente, los sujetos del nivel III proceden según un método fundado en estas operaciones. Ya que no poseen ninguna fórmula métrica de correlaciones, y ya que incluso lo ignoran todo de esta noción matemática, se limitan a utilizar un esquema lógico, con evaluación razonada de las frecuencias numéricas correspondientes: simplemente comparan el número de los casos favorables, que corresponde a $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$, con el de los casos desfavorables que corresponden a $p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$ y, si uno de los conjuntos predomina numéricamente sobre el otro con una nitidez suficiente, concluyen que existe una relación efectiva, positiva o negativa, explicando los casos minoritarios por la intervención de los casos fortuitos.

Entonces, la cuestión consiste en comprender por qué esta noción de correlación no aparece ya desde el estadio concreto. Se podría responder en primer lugar que se trata de una noción probabilística ya compleja: se busca una correlación cuando una relación causal permanece en parte velada por una distribución parcialmente fortuita, y, para pensar en disociar estas dos clases de elementos, precisamente tiene que distinguirse lo probable de lo determinado, vale decir, el conjunto de los casos favorables en el interior de las 4 asociaciones posibles. Ahora bien, se acaba de ver que el esquema de la probabilidad combinatoria tiene una naturaleza formal. Sin embargo, ¿se trata acaso en efecto de una probabilidad combinatoria o la composición aditiva del nivel concreto bastaría para resolver el problema? Ahora bien, en efecto la búsqueda de la correlación supone una combinatoria, puesto que, para el sujeto, el problema no consiste en clasificar simplemente los 4 casos posibles, sino en distinguir en su interior las diversas combinaciones realizables y realizadas: para oponer $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$ a $p \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot q$, es necesario en efecto distinguir estas dos combinaciones (equivalente a $p = q$ y a $p \vee\vee q$) en el interior de las 16 combinaciones posibles, como $p \cdot q \vee p \cdot \bar{q}$, o sea $p\,[q]$ o $p \cdot q \vee \bar{p} \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$, o sea $p \supset q$, etc. Aquí es donde el esquema de las correlaciones depende de la combinatoria proposicional y, por ello, su aparición es tardía y no se observa antes del nivel de las operaciones formales (cap. XV).

Sin embargo, la noción de correlación se emparienta también con la de proporciones, en el sentido que pueden traducirse como proporciones las asociaciones $p \cdot q$, $p \cdot \bar{q}$, etc., que intervienen en la estructura lógica de las correlaciones, así como los valores numéricos correspondientes. Una de estas proposiciones posibles presenta entonces el interés de constituir una proporción negativa [30] desde el punto de vista lógico y corresponder a una correlación nula; se trata de la siguiente proporción:

$$\frac{p \cdot q}{p \cdot \bar{q}} = N \frac{\bar{p} \cdot q}{\bar{p} \cdot \bar{q}}$$

donde

$$(p \cdot q) \cdot (\bar{p} \cdot \bar{q}) = (p \cdot \bar{q}) \cdot (\bar{p} \cdot q) = 0 \ ;$$
$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) = N\,[(\bar{p} \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})]$$
$$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q}) = N\,[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)] \ , \text{ y}$$
$$(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q) = N\,[(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})]$$

Desde el punto de vista numérico, se tiene, en efecto, si p corresponde a n, q a m, $\bar{p}$ a n' y $\bar{q}$ a m':

$$\frac{nm}{nm'} = \frac{n'm}{n'm'} \text{ de donde } nmn'm' = nm'n'm$$

Por lo tanto, esta proporción siempre es verdadera, cualesquiera sean los números n, m, n' y m' (y no solamente si n' es la inversa de n y m' de m). Por otra parte, corresponde a una correlación siempre nula, puesto que $nmn'm' - nm'n'm = 0$.

VII. *Las compensaciones multiplicativas.* — Las compensaciones multiplicativas se relacionan de modo directo con la noción de proporción puesto que si se tiene $xy = x'y'$, también se tiene por definición $x/x' = y'/y$. Sin embargo, desde el punto de vista psicológico, si la construcción de proporciones sin duda comienza siempre por el descubrimiento de compensaciones (véase en II), ésta no siempre supone a aquélla. Por otra parte, existen compensaciones aditivas (por ejemplo cuando un elemento simplemente gana lo que el otro pierde), cuya comprensión se inicia naturalmente en el nivel concreto y así precede en mucho a la de las compensaciones multiplicativas.

Hemos estudiado casos de compensaciones multiplicativas a propósito de la anulación posible de los efectos entre ciertos factores de flexibilidad (cap. III), etc. Sin embargo, ya antes habíamos encontrado un caso sorprendente en cuanto a la conservación del volumen. En efecto, para justificar el hecho de que un volumen cuyas formas cambian no obstante se conserva, el sujeto tiene que comprender que aquello que el volumen gana

[30] Para la noción de proporción lógica negativa, véase Piaget, *Essai sur les transformations des opérations logiques*, París, PUF, 1952, Apéndice, págs. 226-227.

o pierde en una de sus dimensiones queda compensado por lo que pierde o gana en las otras dos. Ahora bien, se trata en efecto de una compensación multiplicativa y que implica, como siempre, la construcción de proporciones posibles. Tomemos por ejemplo un paralelepípedo de $3 \times 4 \times 5$ unidades que se transforma en otro de $6 \times 3 \times 3{,}33 \ldots$ Resulta claro que, si hay conservación del volumen a través de una compensación multiplicativa de las dimensiones, es porque cuando se duplica el valor de uno de los lados (de 3 a 6) disminuye en la mitad el producto de los otros dos ($4 \times 5 = 20$ y $3 \times 3{,}33 \ldots = 10$). La compensación descansa pues sobre una proporción tal que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2 \times c_2}{b_1 \times c_1}$$ o alguna otra semejante.

Ahora bien, cosa interesante desde el punto de vista de la teoría del equilibrio operatorio, el niño no sólo alcanza la noción de las compensaciones multiplicativas y la de conservación del volumen a la edad en que, por otra parte, descubre las proporciones, pero la adquiere sin cálculos métricos y, sobre todo, sin sospechar que estos cálculos numéricos de las compensaciones que concibe cualitativamente implicarían el empleo de las proporciones.[31] Todo sucede pues como si, una vez construido un esquema operatorio, el sujeto descubriera simultáneamente las diversas consecuencias que supone, aun cuando no relacione entre sí de modo explícito a estos diversos aspectos del esquema. En este caso particular descubre, por una parte, algunas compensaciones multiplicativas pero sin sospechar que implican proporciones y, por la otra, algunas proporciones pero sin extraer compensaciones multiplicativas. De una manera más general aún descubre al mismo tiempo las nociones de proporciones, equilibrio, correlaciones, compensaciones multiplicativas, etc., sin sospechar que presentan un fondo operatorio común e ignorando aun más la naturaleza del grupo (el grupo *INRC*) de donde derivan unas y otras.

En el caso de la compensación multiplicativa, esta situación resulta particularmente sorprendente: el sujeto alcanza cualitativamente la idea de compensación pero sin entregarse a cálculo alguno, por lo tanto, se conforma con una clase de esquema anticipatorio de las operaciones que podría efectuar para demostrar esta compensación admitida simplemente como evidente. En una palabra, se reconoce así a la compensación como posible y, a menudo, como necesaria antes que se expliciten los procedimientos operatorios que la justifiquen. Pero, resulta claro que ello no significa en abso-

[31] Para descubrir la aparición de la conservación del volumen, simplemente sumergimos en un vaso una pelota de pasta para modelar y en otro vaso de iguales dimensiones una segunda pelota pero con una forma más alargada o más corta, etc. La conservación de volumen se descubre entonces por la igualdad de los niveles del agua. La edad de la conservación del volumen corresponde entonces a los 11-12 años. Véase Piaget e Inhelder, *Le développement des quantités*, cap. III.

luto que el sujeto se abstenga de toda operación efectiva: su esquema operatorio sólo es anticipatorio en relación con las operaciones métricas que, en efecto, no ejecuta (o en relación con los esquemas conexos con los que no establece vínculo alguno) pero supone operaciones cualitativas. Por ejemplo, ante un volumen que se deforma puede comprender que lo que se eliminó en una de las dimensiones no se suma simplemente de modo aditivo, sino que implica un aumento en forma de producto. Sucede entonces aquí algo análogo a lo observado cuando el sujeto intuye una proporcionalidad antes de calcularla: en este último caso, comprende de antemano que se trata de la identidad de la misma relación, mientras que en el caso de la compensación multiplicativa anticipa el retorno del mismo producto. Porque no explicitar estas operaciones métricas anticipadas por el esquema operatorio cualitativo no establece vínculo alguno entre la noción de las proporciones y la de las compensaciones multiplicativas.

VIII. *Las formas de conservación que van más allá de la experiencia.* — Acabamos de recordar cómo el esquema de la compensación multiplicativa conduce a la noción de la conservación del volumen. Pero la conservación del volumen, que sólo se adquiere efectivamente al comienzo del estadio de las operaciones formales, presenta con las nociones de conservación construidas durante el estadio de las operaciones concretas un punto en común: si la experiencia no basta por sí sola para que se descubran (puesto que suponen una composición operatoria), sí basta en cambio para verificarlas totalmente. Por el contrario existen nociones de conservación que la experiencia verifica en un sentido negativo, porque no las contradice jamás, pero que no logra verificar del todo de modo positivo, porque esta verificación superaría los límites dados de tiempo y espacio o entraría en contradicción con las condiciones físicas en las que opera el experimentador. Se trata, en particular, de la conservación de movimiento rectilíneo y uniforme, que se enfrenta con las siguientes dificultades fundamentales de control experimental: todo movimiento accesible a la experimentación se encuentra tarde o temprano frenado por obstáculos exteriores y su observación se halla limitada en el espacio y el tiempo. El principio de inercia se deduce pues con necesidad, y se verifica por las consecuencias que arrastra, pero no da lugar, hablando en sentido estricto, a una comprobación de hecho.

Ahora bien, en relación con la estructura del grupo de las 4 transformaciones *INRC*, que ya explica la formación de la noción de equilibrio, los sujetos del nivel III B logran descubrir una forma tosca del principio de inercia. Y, cosa interesante, obtienen este resultado no precisamente mediante la experimentación directa, sino a través de una deducción a partir de los obstáculos que se opondrían a esta verificación, vale decir, a partir de las causas de disminución de la velocidad. El razonamiento de los sujetos resulta entonces muy simple, pero por ello tanto más significativo: puesto que toda disminución de la velocidad (enunciada por p) implica la intervención de factores observables (enunciados por $q \vee r \vee s \ldots$) llegan a formular la

hipótesis de que al suprimir todos estos factores (o sea $\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \ldots$) se suprimiría al mismo tiempo toda disminución de velocidad, lo cual equivaldría entonces a la conservación del movimiento (m) con su velocidad (véase cap. VIII, § 5):

Si $p \supset (q \vee r \vee s \ldots)$ entonces $\bar{q} \cdot \bar{r} \cdot \bar{s} \ldots \supset \bar{p}$ de donde $\bar{p} \supset m$

Se ve cómo este razonamiento recurre simultáneamente a la negación o inversión (N) y a la contraposición que es una forma de reciprocidad (R).

§ 6. LA ESTRUCTURA DE CONJUNTO DE LAS OPERACIONES FORMALES EN TANTO FORMA DE EQUILIBRIO FINAL DE LAS OPERACIONES MENTALES

La conclusión que debe extraerse de los análisis anteriores es la siguiente: las diversas posibilidades operatorias implicadas en la estructura de conjunto de reticulado y de grupo que caracteriza al pensamiento formal da lugar a la construcción de esquemas operatorios a menudo muy diferentes unos de otros y que el sujeto no relaciona entre sí, pero que aparecen de modo más o menos solidario e incluso sincrónicamente durante el estadio III.

El problema consiste entonces en comprender a qué corresponde desde el punto de vista psicológico, esta estructura de conjunto, de la que el sujeto no toma conciencia alguna y que sin embargo parece actuar constantemente en la contextura causal de sus comportamientos y pensamiento, puesto que es la fuente, no sólo de las operaciones proposicionales empleadas a partir de este estadio III, sino además de los esquemas operatorios cuyo papel esencial en los procedimientos de la inteligencia característicos de este nivel acabamos de recordar. No podría ser un producto de la experiencia adquirida puesto que precisamente el sujeto no toma conciencia de ella. No podría ser la expresión de una forma *a priori* del espíritu, puesto que sólo aparece en el último estadio del crecimiento mental, vale decir, en el nivel que marca el fin de la infancia y anuncia, a través de la adolescencia, la culminación adulta misma. Suponiendo que estuviera relacionada con coordinaciones nerviosas de maduración tardía, habría entonces que comprender por qué una estructura semejante, desde el momento en que se constituye y se encuentra realizada en ciertos órganos determinados, no se actualiza en su totalidad sino que se limita a presentar manifestaciones parciales como las que acaban de examinarse; en este sentido, el hecho de localizar una estructura semejante en el sistema nervioso más que en la mente o en el inconsciente intelectual no adelanta nada. El verdadero problema es saber si esta estructura de conjunto existe toda hecha "en alguna parte" o si su existencia tiene otra naturaleza: aquí nos vemos necesariamente conducidos, para otorgarle un lugar en el mecanismo causal de la inteligencia al mismo tiempo que respetando los caracteres particulares de su modo de acción, a

concebirla como una forma de equilibrio (lo cual nos vuelve a llevar a las consideraciones del capítulo precedente y los comienzos de éste).

En efecto, si la estructura de conjunto de grupo y reticulado reunidos, característica del pensamiento formal, constituye una forma de equilibrio, entonces su modo de existencia consiste en un conjunto de posibilidades de las que sólo se realizan las operaciones y los esquemas operatorios efectivamente construidos, el resto se reduce a las transformaciones virtuales que pueden producirse a partir de estas realidades efectivas. Por una parte, se comprende entonces por qué el sujeto no podría tomar conciencia de esta estructura de conjunto como totalidad, puesto que esta totalidad se halla en parte formada por simples posibilidades. Pero también, por la otra, se comprende por qué esta totalidad ejerce una acción causal, puesto que, como se vio (cap. XVI, § 2) lo posible psicológico supone un poder de orientación sobre las construcciones reales: en efecto, el conjunto de las transformaciones virtuales constituye un sistema propiamente dicho, cuya contextura obedece precisamente a las leyes de grupo y de reticulado, de tal modo que las construcciones nuevas que se efectúan a partir de las partes ya realizadas no se hacen al azar, sino que se orientan en el sentido de la culminación de la totalidad, de acuerdo con las leyes de composición dominadas por las relaciones de inversión y reciprocidad (en particular sucede así en el caso de los esquemas operatorios del § 5 de este capítulo).

Nos queda aún por comprender por qué esta forma de equilibrio se tornó necesaria dada la evolución mental anterior y por qué puede considerársela, por ello mismo, como final respecto de los estadios ulteriores (estado adulto). En primer lugar hay que recordar que en cada etapa del desarrollo mental el equilibrio de las acciones o las operaciones en cada nueva meseta, resulta a la vez más estable y con un campo más extenso que en los anteriores. Si las percepciones obedecen ya a leyes de equilibrio —como lo mostró la teoría de la *Gestalt*— sólo se trata de estados momentáneos cuyas condiciones se modifican sin cesar ("desplazamientos de equilibrio", como se dice en física). Las acciones sensoriomotoras engloban percepciones y movimientos en sistemas un poco más extensos pero vinculados con las situaciones presentes y sujetos a los mismos desplazamientos. Con el empleo de las representaciones, las conductas preoperatorias amplían aún más el campo del equilibrio, pero las coordinaciones efectuadas todavía dependen de las configuraciones actuales y, por lo tanto, se hallan siempre dominadas por la sucesión de los desplazamientos de equilibrio. En cambio, con la constitución de las operaciones concretas, la reversibilidad entera de los sistemas operatorios nacientes asegura al equilibrio una estabilidad limitada, en el interior de los diversos campos que corresponden a las "agrupaciones" constituidas. Pero, puesto que la forma de estos sistemas operatorios no se halla aún del todo disociada del contenido, nos encontramos ante mesetas sucesivas de equilibración, en función de los dominios heterogéneos que deben estructurarse, sin que se constituya todavía una forma general de equilibrio entre las diversas operaciones independientemente de los contenidos. Por

último, con el pensamiento formal se constituye esta forma, cuya necesidad se debe a la doble exigencia de una coordinación de conjunto de las operaciones de diversas variedades y una liberación de la forma respecto de los contenidos. Esta forma general de equilibrio debe entonces concebirse como final, en el sentido de que ya no se modificará durante el resto de la existencia si se integra en sistemas más amplios (lógicos polivalentes) y si reúne en un sistema único a las agrupaciones hasta ahora carentes de vinculaciones operatorias entre sí. Por otra parte, necesariamente es el resultado de la evolución anterior, puesto que la evolución de las estructuras debe concebirse como un crecimiento de equilibrio, por lo tanto, como una evolución dirigida. Esto no significa que esta evolución se encuentra determinada por causas finales: en la física el crecimiento de la entropía constituye un buen ejemplo de un camino hacia el equilibrio, o de una evolución dirigida, con independencia de todo finalismo; ahora bien, la evolución de las operaciones obedece a una ley análoga, pero con dos diferencias: el equilibrio operatorio es tanto más móvil cuanto más estable y las transformaciones virtuales o posibles desempeñan este tipo de función causal propia de las realidades mentales que hemos analizado anteriormente.

Considerar como una forma de equilibrio a la estructura de conjunto que domina el pensamiento formal no equivale pues a satisfacer una simple necesidad de simetría en relación con la física y aun menos en sostener una tesis filosófica: por el contrario, se trata de una simple consecuencia a partir del hecho de que la psicología no es una lógica. Al no ser una lógica, no puede contentarse con explicar los hechos mediante una estructura abstracta. Los hechos a los que remiten sus investigaciones son acciones y, en particular, esas acciones interiorizadas o mentalizadas que son las operaciones. Estas acciones y operaciones actúan y reaccionan entonces las unas sobre las otras, de acuerdo con leyes causales, mientras que la conciencia las traduce bajo la forma de conexiones implicadoras en el sentido más amplio del término (vale decir, vinculaciones entre nociones y valores). Desde este punto de vista causal, pueden producir mezclas más o menos confusas y desequilibradas, o bien desembocar en la constitución de estructuras equilibradas. La observación nos muestra la importancia que presenta esta segunda eventualidad. En este último caso, la psicología se ve obligada a recurrir, para caracterizar estas formas de equilibrio, a un instrumento de cálculo que le permita deducir sus posibilidades y prever sus efectos. Este instrumento lo encuentra en el álgebra logística, pero esta álgebra no constituye para la psicología sino una traducción simbólica cuya utilidad esencial es la de ser un cálculo. Pero la realidad de los hechos que recubre esta traducción simbólica es la de un campo de acciones coordinadas. Desde este punto de vista la noción de equilibrio resulta indispensable para la explicación causal, ya que ella sola permite comprender de qué modo, en un nivel dado, la inteligencia se compromete al mismo tiempo en todas las direcciones abiertas en tal campo en función de las transformaciones virtuales que la caracterizan como en función de las construcciones ya efectuadas. Si

esta explicación se completa tarde o temprano con consideraciones neurológicas, entonces las estructuras de las agrupaciones, los reticulados y los grupos volverán a encontrarse en una forma u otra en esta nueva perspectiva y estas leyes de equilibrio serán entonces de carácter más general que sólo vinculadas con las conductas: ya la cibernética permite comprender cómo esta vinculación resulta posible, puesto que la solución de un problema, en un *homeostato*, también procede por medio de equilibraciones sucesivas en el interior de un sistema estructurado por una combinatoria (reticulados) y por las leyes esenciales de la reversibilidad (regulaciones y grupos).

CAPITULO XVIII

EL PENSAMIENTO DEL ADOLESCENTE

Resulta sorprendente que, en comparación con los excelentes y numerosos trabajos que se publicaron acerca de la vida afectiva y social del adolescente —resulta inútil recordar los estudios de Stanley Hall, Compayré, Mendousse, Spranger, Ch. Bühler, Landis, Wayne Dennis, Brooks, Fleming, Debesse, psicoanalistas como A. Freud, H. Deutsch, sociólogos y antropólogos como Malinowski y M. Mead, etc.—, se haya profundizado tan poco el análisis del pensamiento propio de la adolescencia.

Los pocos estudios detallados publicados acerca de este tema resultan por ello aun más valiosos, pero no fueron suficientes hasta ahora para hacernos entrever un cuadro de conjunto coherente. Por una parte, los tests de inteligencia, como los de Terman, Burt y en particular las frases absurdas de Ballard, proporcionan información acerca del carácter hipotético-deductivo del pensamiento formal que se constituye a partir de los 11-12 años; por la otra, ciertos trabajos acerca del pensamiento matemático y físico del adolescente —Johannot, Michaud, etc.— pusieron en evidencia en particular los residuos del pensamiento del niño que vuelven a encontrarse durante la adolescencia por una suerte de desfasaje entre los problemas del plano concreto al plano más abstracto.

Por lo tanto, en este último capítulo quisiéramos investigar si los resultados contenidos en los capítulos precedentes, que se refieren al pensamiento experimental de los adolescentes enfrentados con dispositivos que los conducen a la vez a la acción y a la reflexión, permiten aclarar los grandes aspectos de este cuadro cuyo esbozo no permitieron hasta ahora ni los tests, ni el estudio del pensamiento verbal, ni siquiera el del pensamiento matemático.

Desde el punto de vista de las estructuras lógicas, estos resultados parecen implicar una conclusión que opone bastante el adolescente al niño. El niño sólo consigue la manipulación de las operaciones concretas de clases, relaciones o números, cuya estructura no va más allá del nivel de las "agrupaciones" lógicas elementales o de los grupos numéricos aditivos y multiplicativos; de este modo consigue utilizar las dos formas complementarias de la reversibilidad (inversión para las clases y los números, reciprocidad para

las relaciones) pero sin fusionarlas en ese sistema único y total que caracteriza a la lógica formal. Por el contrario, el adolescente superpone la lógica de las proposiciones a la de las clases y las relaciones y elabora así poco a poco (logrando su meseta de equilibrio alrededor de los 14-15 años) un mecanismo formal fundado a la vez sobre las estructuras del reticulado y el grupo de las 4 transformaciones; éstas le permiten entonces reunir en un mismo todo a la inversión y la reciprocidad y, en consecuencia, dominar, además del razonamiento hipotético-deductivo y la prueba experimental fundados sobre la variación de un solo factor (permaneciendo igual todo lo demás), un cierto número de esquemas operatorios que constantemente aplicará tanto en su pensamiento experimental como en su pensamiento lógico-matemático.

Sin embargo, la lógica no lo es todo en el pensamiento y se trata precisamente de buscar ahora si estas transformaciones de las estructuras lógicas corren parejas a las modificaciones generales del pensamiento en que por lo general se concuerda —a veces de modo explícito y a menudo de modo implícito— en considerar como características de la adolescencia. Quisiéramos intentar mostrar someramente, no sólo que así es en efecto, sino además que la transformación de las estructuras constituye como un centro desde el cual irradian las diversas modificaciones más visibles del pensamiento de los adolescentes.

Pero tenemos que empezar por disipar un equívoco posible. Consideraremos como carácter fundamental de la adolescencia la inserción del individuo en la sociedad de los adultos. La pubertad no podría pues ser el criterio para distinguir a la adolescencia. La pubertad aparece, como promedio, alrededor de las mismas edades en todas las razas y todas las sociedades, contrariamente a una opinión errónea difundida comúnmente (es cierto que se observó un leve retraso en Canadá y Escandinavia, pero no las diferencias considerables entre el Norte y el Sur, etc., que la leyenda acreditaba). Por el contrario, la inserción en la sociedad adulta varía considerablemente según las diversas sociedades e incluso los diversos medios sociales. Ahora bien, para nuestro propósito, esta transición social fundamental constituye el fenómeno esencial.

No se trata pues de relacionar el pensamiento formal con la pubertad, lo cual no significa que no existan muchos vínculos entre el advenimiento de las estructuras formales y las transformaciones de la afectividad; volveremos en seguida sobre este tema. Pero estas relaciones son complejas y no presentan un único sentido. Incluso en este punto, sería embrollarlo todo de antemano el querer reducir la adolescencia a las manifestaciones de la pubertad. Por ejemplo, no puede sostenerse que la aparición del amor sea una característica propia de la adolescencia: existen niños enamorados y lo que en nuestras sociedades distingue a un adolescente enamorado de un niño es que, por lo general, el primero complica sus sentimientos mediante la construcción de una novela o la referencia a ideales sociales e incluso literarios de todo tipo. Ahora bien, la fabricación de una novela o el recurso

a modelos colectivos variados no son ni los productos directos de las transformaciones neurofisiológicas de la pubertad ni siquiera productos exclusivos de la afectividad: corresponden también a reflejos indirectos y particulares de esta tendencia general de los adolescentes a construir teorías y emplear ideologías del ambiente. Esta tendencia general sólo se explica si se toman en cuenta dos factores asociados que volveremos a encontrar constantemente: las transformaciones del pensamiento y la inserción en la sociedad adulta, inserción que supone una reorganización total de la personalidad, constituyendo las transformaciones su aspecto intelectual paralelo o complementario de su aspecto afectivo.

Sin embargo, si la aparición del pensamiento formal no es una consecuencia de la pubertad, ¿no debe acaso considerarse como la manifestación de transformaciones cerebrales resultantes de la maduración del sistema nervioso y que pueden hallarse en relación directa o indirecta con la pubertad? En efecto, es muy probable que si el niño de 7-8 años (salvo excepciones muy raras) no logra la manipulación de las estructuras que el adolescente de 14 a 15 años de nuestras sociedades elabora fácilmente, es porque carece de una cierta cantidad de coordinaciones cuyas fechas de formación se hallan determinadas por las etapas de la maduración. Por otra parte, las estructuras de reticulado y de grupo son con toda verosimilitud isomorfas a las estructuras nerviosas [1] y con seguridad son isomorfas a las estructuras de los modelos mecánicos que concibió la cibernética para imitar al cerebro.[2] Parece pues evidente que el desarrollo de las estructuras formales de la adolescencia se encuentre conectado con el de las estructuras cerebrales. Pero esta relación está lejos de ser una relación simple puesto que la constitución de las estructuras formales depende sin duda alguna también del medio social. La edad de 11-12 años que caracteriza sus inicios en nuestras sociedades resulta ser muy relativa, puesto que la lógica de las sociedades llamadas primitivas parece ignorar estas estructuras y puesto que su historia se relaciona tanto con la evolución de la cultura y las representaciones colectivas como con una historia ontogenética. Si, por una parte, los griegos tomaron conciencia de estas estructuras en su reflexión lógica y matemática, también parece verosímil que los niños griegos se encontraban más atrasados que los nuestros: la edad actual de 11-12 años sería pues, además de los factores neurológicos, producto de una aceleración progresiva del desarrollo individual bajo la influencia de la educación y nada impide que en un futuro más o menos lejano disminuya aun más esta edad promedio.

En resumen, lejos de constituir una fuente de "ideas innatas" ya todas elaboradas, la maduración del sistema nervioso se limita a determinar el conjunto de las posibilidades e imposibilidades para un nivel dado, resulta pues

[1] Se sabe que W. McCulloch y W. Pitts (*Bull. math. Biophys.*, t. V, páginas 115-133, Chicago, 1953) aplicaron los esquemas de la lógica de las proposiciones a las conexiones neurónicas.

[2] Véase Piaget, "Structures opérationnelles et cybernétique", *Année psychol.*, tomo 53, 1953, págs. 379-388.

indispensable un cierto medio social para la actualización de estas posibilidades. Esta actualización puede entonces acelerarse o retardarse en función de las condiciones culturales y educativas: por ello, tanto el advenimiento del pensamiento formal como la edad del adolescente en general, vale decir, la inserción del individuo en la sociedad adulta, siguen dependiendo de los factores sociales tanto como y aun más que de los factores neurológicos.

En lo que concierne a las estructuras formales, en particular hemos observado a menudo la convergencia entre algunas reacciones de nuestros sujetos y algunas enseñanzas escolares, hasta tal punto que podemos preguntarnos si las manifestaciones individuales del pensamiento formal no son simplemente un resultado impuesto por el grupo social a través de la educación familiar y escolar. Pero los hechos psicológicos permiten responder a esta hipótesis sociológica extrema: que la sociedad no actúa a través de una simple presión exterior sobre los individuos en período de formación y que éstos no constituyen, respecto del medio social como del medio físico, simples tablas rasas sobre las que se imprimen las coacciones de los conocimientos ya estructurados. Para que el medio social actúe realmente sobre los cerebros individuales, es necesario que éstos puedan asimilar los aportes del medio social; volvemos entonces a caer sobre la necesidad de una maduración suficiente de los instrumentos cerebrales individuales.

Desde este proceso circular, característico de los intercambios entre el sistema nervioso y la sociedad, se desprenden dos consecuencias. La primera es que las estructuras formales no son ni formas innatas o *a priori* del entendimiento, que se inscribirían de antemano en el sistema nervioso, ni representaciones colectivas que existen ya todas elaboradas fuera y por encima de los individuos, sino formas de equilibrio que poco a poco se imponen al sistema de los intercambios entre los individuos y el medio físico y al sistema de los intercambios entre los individuos mismos; por otra parte, estos dos sistemas no constituyen fundamentalmente sino uno solo con dos aspectos distintos (distintos en cuanto al análisis). Esto concuerda, pues, con lo que constantemente hemos afirmado.

La segunda consecuencia es que entre el sistema nervioso y la sociedad existe la actividad individual, vale decir, el conjunto de las experiencias y ejercicios realizados por el individuo para adaptarse a la vez al mundo físico y al social. Si las estructuras formales son leyes de equilibrio y si existe una actividad funcional propia del individuo, entonces debe esperarse que el pensamiento del adolescente —si la adolescencia en efecto es la edad de la inserción de los individuos en formación dentro de la sociedad de los adultos— presenta una serie de manifestaciones espontáneas que traducen esta construcción de las estructuras formales de una manera vívida y real, de una manera que precisamente asegura, en las acciones cotidianas y en la vida misma de los sujetos, su inserción en la vida social de los adultos.

Pero en primer lugar ¿qué significa concretamente semejante inserción? A la inversa del niño que se siente inferior y subordinado al adulto, el adolescente es el individuo que comienza por considerarse como un igual ante

los adultos y por juzgarlos en este plano de igualdad y entera reciprocidad. Sin embargo, a esta primera característica se le suman de modo indisoluble otras dos. En segundo lugar, el adolescente es el individuo que todavía se halla en un período de formación pero que comienza a pensar en el futuro, vale decir, en su trabajo actual o futuro en el interior de la sociedad, y que acompaña sus actividades actuales con un programa de vida para sus actividades ulteriores o "adultas". En tercer lugar, y sin duda en la mayor parte de los casos de nuestras sociedades, el adolescente es el individuo que, al buscar introducirse e introducir su trabajo actual o futuro en la sociedad de los adultos, se propone también (y, según él, en la práctica misma) reformar a esta sociedad en alguno de sus dominios restringidos o en su totalidad: en efecto, la inserción de un individuo en la sociedad adulta no podría producirse sin conflictos, y mientras que el niño busca la solución para estos conflictos en las compensaciones actuales (lúdicas o reales), el adolescente suma a estas compensaciones limitadas una compensación más general: una voluntad o incluso un plan de reformas.

Ahora bien, definido de este modo en sus tres aspectos solidarios, la inserción del adolescente en la sociedad de los adultos presupone con seguridad el empleo de algunos instrumentos intelectuales y afectivos, cuya elaboración espontánea opone precisamente la adolescencia a la infancia. ¿En qué consisten pues, para comenzar por ellos, estos nuevos instrumentos intelectuales y qué relación tendrán con el pensamiento formal?

Si nos contentamos con una observación global e ingenua, sin buscar diferenciar a través de sus reacciones sociales específicas al escolar, al aprendiz, al joven obrero o al campesino, el adolescente puede distinguirse ante todo del niño por la presencia de una reflexión que va más allá del presente. El adolescente es el individuo que, por supuesto como respuesta a situaciones vividas y actuales, se compromete en la dirección de las consideraciones inactuales. Dicho de otro modo aun, y dando a las palabras "teorías" y "sistemas" la significación más amplia, el adolescente, contrariamente al niño, es aquel individuo que comienza a construir sistemas o teorías.

En cuanto al niño, no construye sistemas. Su pensamiento espontáneo puede ser más o menos sistemático (en primer lugar lo es muy poco y luego más), pero sólo lo percibe desde afuera el observador, en cambio el niño no toma conciencia de ello porque su pensamiento no reflexiona sobre sí mismo. Por ejemplo, en el análisis, en trabajos anteriores, de la "representación del mundo" del niño, pudimos observar algunas reacciones sistemáticas y construir el sistema correspondiente a tal o cual nivel: pero somos nosotros quienes lo construimos; en cambio el niño, si bien a menudo encuentra de modo espontáneo las mismas preocupaciones y proporciona sin darse cuenta de ello respuestas análogas,[3] no busca en absoluto la sistematización de sus ideas a falta de una reflexión, vale decir, un pensamiento indispensable para la construcción de toda teoría.

[3] Véase por ejemplo en *La formation du symbole chez l'enfant*, cap. IX.

Por el contrario, el adolescente reflexiona sobre su propio pensamiento y construye teorías. El hecho de que estas teorías sean poco profundas, poco hábiles y sobre todo por lo general poco originales no es importante: desde el punto de vista funcional, estos sistemas presentan la significación esencial de permitirle al adolescente su inserción moral e intelectual dentro de la sociedad de los adultos, sin hablar aún de su programa de vida y sus proyectos de reforma. En particular le son indispensables para asimilar las ideologías que caracterizan a la sociedad o a las clases sociales como cuerpos organizados en oposición a las simples relaciones interindividuales.

Examínese desde este punto de vista a un conjunto de escolares entre los 14-15 años y 17-18 años. La mayoría tiene teorías políticas o sociales y quiere reformar al mundo al mismo tiempo que explicarse a su manera los mecanismos y desórdenes de la vida colectiva. Otros, tienen teorías literarias o estéticas y sitúan a sus lecturas o sus experiencias de lo bello en una escala de valores proyectada en un sistema. Las crisis religiosas y la reflexión acerca de la fe, o contra la fe, dominan a algunos sujetos y toman entonces siempre el camino de un sistema general, vale decir, que se postula como válido para todo el mundo. La especulación filosófica apasiona a una minoría y, para todo verdadero intelectual, la adolescencia es la edad metafísica por excelencia, edad cuyas peligrosas seducciones le serán difícil de olvidar a la reflexión adulta ulterior. Una minoría más reducida aún se orienta de entrada hacia las teorías científicas o seudocientíficas. Pero cada uno tiene su o sus teorías, más o menos explícitas y formulables o simplemente implícitas. Algunos escriben y resulta de gran interés poder encontrar los esbozos de ideas que a veces se retoman y se prolongan luego. Otros, se limitan a hablar o a rumiar, pero cada uno tiene ideas propias (y, por lo general, cree que son de él), ideas que lo liberan de la infancia y le permiten situarse en pie de igualdad con los adultos.[4]

Dejemos ahora al colegio y, sobre todo, a las clases intelectuales para examinar al adolescente aprendiz, obrero o campesino: se reconocerá el mismo fenómeno pero bajo otras formas. En vez de la elaboración de "teorías" personales, se encontrará con mayor frecuencia una adhesión a las ideas transmitidas por los compañeros, desarrolladas en las reuniones o provocadas por las lecturas. Se encontrarán menos crisis familiares y aún menos crisis religiosas y, sobre todo, se encontrará menos abstracción. Sin embargo, bajo esos aspectos exteriores diferentes y variados se discernirá con facilidad el mismo proceso central: el adolescente no se contenta con vivir las relaciones interindividuales que su medio le ofrece, ni en poner su inteligencia al servicio de la resolución de los problemas actuales; busca además insertarse en el cuerpo social de los adultos y, con esta finalidad, tiende a participar de las ideas, los ideales y las ideologías de un grupo más amplio a través de

[4] Las muchachas se interesan por supuesto más en el matrimonio, pero el marido con el que sueñan es a menudo "teórico" y sus reflexiones acerca de la vida conyugal adquieren muchas veces también la configuración de "teorías".

la utilización de una cantidad de símbolos verbales que cuando niño le eran indiferentes.

Ahora bien, ¿cómo explicar esta nueva capacidad, propia del adolescente, para orientarse hacia lo que (visto desde afuera y por un observador que lo compara con el niño) es no actual y abstracto pero que (visto desde adentro) constituye su instrumento indispensable de adaptación al cuerpo social adulto y, en consecuencia, su interés más inmediato y vívido? No hay duda de que ésta es la manifestación más directa y por otra parte más simple del pensamiento formal. El pensamiento formal constituye a la vez una reflexión de la inteligencia sobre sí misma (la lógica de las proposiciones constituye un sistema operatorio a la segunda potencia que opera sobre proposiciones cuya verdad depende de operaciones de clases, relaciones o números) y una inversión de las relaciones entre lo posible y lo real (lo real que se inserta como sector particular dentro del conjunto de las combinaciones posibles). Estos dos caracteres —cuya descripción en un lenguaje abstracto adecuado al análisis de los razonamientos hemos hasta ahora intentado— constituyen la fuente de las reacciones vividas y siempre tan impregnadas de afectividad mediante las cuales el adolescente construye sus ideales para adaptarse al cuerpo social. En efecto, si el adolescente construye teorías lo hace, por una parte, porque ya está capacitado para la reflexión y, por la otra, porque su reflexión le permite evadirse de lo concreto actual en la dirección de lo abstracto y lo posible. Con ello no pretendemos en absoluto afirmar que primero existe la elaboración de las estructuras formales y luego su aplicación a reflexiones individual y socialmente útiles como instrumentos adaptativos: por el contrario, se trata de los dos aspectos de una misma realidad; aún más, porque el pensamiento formal desempeña un papel fundamental, desde el punto de vista funcional, que logra estructurarse en sus modos generales y lógicos. Una vez más, la lógica no es extraña a la vida: no es sino la expresión de las coordinaciones operatorias necesarias para la acción.

Entonces, no hay que creer que la inserción de la adolescencia en el cuerpo social de los adultos simplemente se efectúa por cuenta de teorías generales y desinteresadas; hay que tener en cuenta los otros dos aspectos de tal inserción: el programa de vida y la reforma de la sociedad actual. En efecto, el adolescente construye sus teorías, o adopta, reconstruyéndolas, las que se le ofrecen: pero, junto a la necesidad de participar en las ideologías adultas, le es indispensable elaborar una concepción de las cosas que le ofrezca la posibilidad de afirmarse y crear (de ahí el vínculo estrecho entre el sistema construido y el programa de vida) y que se constituya en una garantía de que incluso triunfará mejor que sus predecesores (de ahí las reformas necesarias en que se mezclan del modo más íntimo las preocupaciones desinteresadas y las ambiciones características de la juventud).

Dicho de otro modo, en este nuevo plano de pensamiento y realidad que la inteligencia operatoria formal descubre, aparece el mismo proceso que hemos estudiado meseta por meseta en los diferentes niveles del desarrollo

del niño: una indiferenciación inicial entre un objeto o el otro y las propias actividades, seguido de una descentración en el sentido de la objetividad y la reciprocidad. Ya en el plano sensoriomotor el lactante comienza por no saber disociar lo que corresponde a sus acciones y lo que pertenece a los objetos o a las personas exteriores: en primer lugar, vive en un mundo sin objetos permanentes exteriores, sin la conciencia de un yo o de una subjetividad interiores; luego, mediante una serie de descentraciones resultantes de la coordinación progresiva de las acciones, logra diferenciar a su yo y situar su cuerpo en un universo organizado espacial y causalmente, compuesto de objetos permanentes y personas semejantes a él mismo. Pero, al aparecer la función simbólica, el lenguaje, la representación y los intercambios con los semejantes, este universo se expande en proporciones imprevistas y se hace necesaria una nueva estructuración. En esta segunda situación, reaparece entonces el egocentrismo en un nuevo plano y en la forma de una indiferenciación relativa inicial entre el punto de vista propio (punto de vista representativo y ya no sensoriomotor) y el de los otros, así como una indiferenciación relativa entre lo subjetivo y lo objetivo (siempre en cuanto a la representación y ya no con referencia a los esquemas sensoriomotores). Por el contrario, con las coordinaciones alcanzadas en el nivel de las operaciones concretas (7-8 años), se hace posible una descentración suficiente para permitirle al niño pensar objetivamente las vinculaciones que corresponden a las clases, relaciones y números y actuar de modo interindividual en función de un conjunto de relaciones cooperativas (por otra parte, la cooperación y la constitución de las operaciones representan los dos aspectos de una misma realidad). Pero con la nueva expansión del universo que por último provoca la elaboración del pensamiento formal, se manifiesta en primer lugar una tercera forma de egocentrismo que precisamente marca uno de los caracteres más o menos constantes de la adolescencia, hasta la nueva descentración ulterior que hará posible los inicios reales del trabajo adulto.

Esta forma superior de egocentrismo que el adolescente atestigua constituye, por otra parte, la consecuencia inevitable de su inserción en la vida social adulta puesto que, como bien lo dijo Charlotte Bühler, el adolescente no sólo busca adaptar su yo al medio social, sino también adaptar el medio a su yo. En otros términos, al esforzarse por pensar al medio en el que busca introducirse, pensará por ello mismo su actividad futura en el cuerpo social y los medios para transformarlo: de ahí una indiferenciación relativa entre su propio punto de vista como individuo llamado a construir un programa de vida y el punto de vista del grupo que trata de reformar.

Para hablar más concretamente, el egocentrismo propio de la adolescencia se pone de manifiesto por la presencia de una especie de mesianismo de una naturaleza tal que las teorías mediante las cuales se representa al mundo se centran en la actividad reformadora que se siente llamado a desempeñar en el futuro. Aquí ya no conviene recurrir a la simple observación sino a documentos más secretos como los ensayos escritos no desti-

nados a una publicidad inmediata, los diarios íntimos o simplemente las confidencias que pueden obtenerse de ciertos adolescentes acerca de sus ensoñaciones íntimas. Por ejemplo, piénsese en los relatos que G. Dumas solicitó en una clase de liceo, acerca de las ensoñaciones nocturnas: los alumnos más normales, más modestos, más tranquilos, confesaban sin inquietud alguna imaginaciones o fabulaciones que, algunos años más tarde, les hubieran parecido signos de megalomanía patológica... Sin insistir acerca de estas representaciones particulares, el aspecto general del fenómeno debe buscarse en la relación entre las teorías aparentemente abstractas elaboradas por el sujeto y el plano de vida que se traza: se percibe entonces que bajo los aspectos externos impersonales y generales, el sistema abarcaba un programa de acción de una ingenua y a menudo desmesurada ambición. Por ejemplo, al examinar a una decena de ex alumnos de una pequeña clase, en un pueblo de la Suiza francesa, tomamos como ejemplo algunos de los siguientes casos. Uno de estos alumnos, con el tiempo comerciante, asombraba a sus compañeros por sus doctrinas literarias y escribía a escondidas una novela. El otro, con el tiempo director de una compañía de seguros, se interesaba entre otras cosas por el porvenir del teatro y mostraba a algunos de sus amigos íntimos la primera escena del primer acto de una tragedia que, por otra parte, ahí quedó. Un tercero, fascinado por la filosofía, simplemente se consagraba a la reconciliación entre la ciencia y la religión. Inútil insistir acerca de los reformadores sociales y políticos, de derecha e izquierda. Sólo hubo dos excepciones a estos sorprendentes programas de vida: dos adolescentes un poco aplastados por el superyó de origen paterno, pero cuyas ensoñaciones secretas no se conocían.

En algunos casos este tipo de programas de vida tiene una influencia efectiva en el desarrollo ulterior del individuo y puede suceder que, en sus papeles de adolescente, se encuentre el esbozo de algunas ideas que luego efectivamente realizó. Pero, en muchos otros los proyectos de los adolescentes se asemejan más a una especie de juego superior con funciones de compensación, afirmación del yo, imitación de los modelos de los adultos, participación en medios de hecho inaccesibles, etc., y se comprometen así en direcciones que satisfacen por un tiempo y que luego se abandonan. M. Debesse habló en este sentido de egotismo y crisis de originalidad juvenil. Pero creemos que en esta clase de egocentrismo propia del adolescente hay algo más que un simple deseo de ser diferente de los otros: hay un fenómeno de indiferenciación sobre el que conviene todavía insistir brevemente.

En una cualquiera de las mesetas del desarrollo, lo propio del proceso que conduce del egocentrismo a la descentración lo constituye la subordinación del progreso del conocimiento a una constante remanipulación de las perspectivas. Todo el mundo observó que el niño confunde lo subjetivo y lo objetivo, si la hipótesis del egocentrismo se limitase a repetir este fenómeno sería entonces bastante inútil; por el contrario, su significación propia consiste en sostener que el progreso del conocimiento no es puramente aditivo y que sumar a un conocimiento otro no es suficiente para constituir una

actitud de objetividad. Por el contrario, la objetividad supone una descentración, vale decir, una reorganización continua de las perspectivas: el egocentrismo es aquel estado de indiferenciación que ignora la multiplicidad de las perspectivas, mientras que la objetividad supone a la vez una diferenciación y una coordinación de los puntos de vista.

Ahora bien, en el nivel de la adolescencia, en ese plano superior del pensamiento —el de las estructuras formales— volvemos a encontrar un proceso análogo: la extensión indefinida de la reflexión que este nuevo instrumento permite —la lógica de las proposiciones— conduce en primer lugar a una indiferenciación entre este nuevo e imprevisto poder que el yo descubre y el universo social o cósmico que constituye el objeto de esta reflexión. En otros términos, el adolescente pasa por una fase en la que le atribuye una potencia ilimitada a su pensamiento y soñar con un futuro glorioso o con transformar al mundo a través de la Idea (incluso cuando este idealismo adquiera la forma de un materialismo en todas sus variedades posibles) aparece no sólo como un acto de conocimiento positivo, sino además como una acción efectiva que modifica a la realidad como tal. En efecto, existe una forma de egocentrismo del pensamiento muy diferente a la del niño (que es o sensoriomotor, o simplemente representativo y sin "reflexión"), pero que procede del mismo mecanismo en función de las nuevas condiciones creadas por la elaboración del pensamiento formal.

Existe un medio de verificar esta interpretación: estudiar el proceso de descentración que luego permite al adolescente escapar a esta indiferenciación relativa inicial y curarse de su crisis idealista para alcanzar de nuevo lo real, en resumen, ese proceso que lo conduce de la adolescencia al verdadero comienzo del estado adulto. Ahora bien, esta descentración se efectúa, como en el nivel de las operaciones concretas, simultáneamente en el plano social y en el del pensamiento.

Socialmente, todos hemos observado la tendencia del adolescente a agruparse con sus semejantes: grupos de discusión o acción, grupos políticos, movimientos de juventud, campamentos de vacaciones, etcétera. Charlotte Bühler habla de la fase de expansión que sigue a la fase de replegamiento, sin que por otra parte siempre pueda distinguírsela de modo nítido. Ahora bien, esta vida social con toda seguridad constituye una fuente de descentración intelectual y no sólo moral: en las discusiones entre compañeros es donde el promotor de teorías descubre, a menudo, a través de la crítica de las de los otros, la fragilidad de las suyas.

Pero el hecho capital desde el punto de vista de la descentración se localiza en el inicio del trabajo propiamente dicho. Cuando al emprender una tarea efectiva el adolescente se convierte en adulto y de reformador idealista se transforma en realizador. Dicho de otro modo, el trabajo es el que permite que el pensamiento amenazado de formalismo se reúna con lo real. Ahora bien, la observación muestra hasta qué punto esta reconciliación del pensamiento y la experiencia puede resultar laboriosa y lenta. Basta

examinar el comportamiento de los estudiantes que se inician en una disciplina experimental para comprobar hasta qué punto la creencia del adolescente en el poder del pensamiento puede permanecer presente durante mucho tiempo y lo poco que el espíritu tiende a subordinar las ideas al análisis de los hechos (lo cual no significa que los hechos sean accesibles con independencia de una interpretación, sino que la construcción interpretativa sólo adquiere valor con respecto a la verificación experimental).

En este sentido, los resultados de los capítulos I a XV de esta obra presentan un problema de un cierto alcance. Las reacciones de los sujetos ante dispositivos experimentales de todo tipo muestran que, después de una fase de elaboración (11-12 a 13-14 años) en que el preadolescente logra manipular ciertas operaciones formales (implicación, exclusión, etc.) pero sin constituir un método suficiente de verificación, el adolescente de 14-15 años consigue (de modo espontáneo, ya que en este dominio el verbalismo escolar marca su mayor déficit) utilizar de modo sistemático procedimientos de control que suponen una combinatoria, cuando modifica a un solo factor con exclusión de los otros ("permaneciendo igual todo lo demás", etc.). Ahora bien, esta constitución de los instrumentos de verificación experimental deriva de modo directo, lo hemos visto constantemente, del pensamiento formal y de las operaciones interproposicionales. Entonces, el problema es el siguiente: ¿por qué el adolescente al mismo tiempo que se muestra capaz de deducción e inducción experimental, otorga tal poder a la primera y sólo muy tarde llega a utilizar la segunda en un trabajo continuo y efectivo (ya que reaccionar de modo experimental ante un dispositivo preparado de antemano es algo muy diferente que organizarse a sí mismo para un trabajo de investigación)? Por otra parte no se trata de un problema ontogenético: es histórico y surge la misma pregunta si se quiere comprender por qué los griegos se limitaron (salvo en algunas excepciones) a la reflexión y deducción [5] y por qué la ciencia moderna, centrada en la física, tardó tanto en constituirse.

Para resolver este problema (aquí no hablamos sino del adolescente) nos parece indispensable invocar, junto al florecimiento del pensamiento formal, la indiferenciación relativa del sujeto y el objeto que en este nuevo plano acompaña a su aparición y luego la descentración laboriosa y lenta que sólo se presentan con colaboraciones sociales y con la sumisión progresiva a un trabajo efectivo.

Se comprueba así que los principales caracteres intelectuales de la adolescencia derivan, directa o indirectamente, de la elaboración de las estructuras formales, la que constituye entonces el acontecimiento central del pensamiento propio de este período. En cuanto a las novedades afectivas

[5] Y todavía no se encontró explicación seria para este hecho desde el punto de vista sociológico. Atribuir las estructuras formales explicitadas por los griegos al carácter contemplativo de tal o cual clase social no explica por qué esta contemplación quedó confinada a las ideologías metafísicas y desembocó en la creación de una matemática.

que caracterizan a este mismo período hay que destacar dos principales; como de costumbre son paralelas o correspondientes a las transformaciones intelectuales, puesto que la afectividad representa la energética de las conductas cuya estructura define las funciones cognitivas (lo cual no significa que la afectividad esté determinada por el intelecto ni a la inversa, sino que ambos se hallan relacionados de modo íntimo en el funcionamiento de la persona).

En efecto, si la adolescencia es la edad de la inserción de los individuos en período de formación en el cuerpo social adulto (coincida o no esta inserción con la pubertad), esta adaptación social decisiva implicará entonces, en correlación con el desarrollo de las operaciones proposicionales o formales que aseguran su estructuración intelectual, las dos transformaciones fundamentales que exige la socialización afectiva adulta: sentimientos referidos a ideales que se suman a los sentimientos entre las personas, y formación de personalidades caracterizadas por el rol social y la escala de valores que se asignan (y ya no sólo por la coordinación de los intercambios que mantienen con el medio físico y las otras personas).

Por supuesto éste no es el lugar adecuado para entregarnos a un ensayo de psicología afectiva, pero resulta interesante señalar para terminar cómo estos dos aspectos afectivos esenciales a la adolescencia se hallan, ellos también, emparentados con las transformaciones de la conducta derivadas de la construcción de las estructuras formales.

En primer lugar, en cuanto a los sentimientos referidos a los ideales resulta sorprendente comprobar que el niño permanece indiferente en mayor o menor grado ante ellos. Una encuesta acerca de la idea de patria y las actitudes sociales que la acompañan [6] nos mostró que el niño se interesa por su familia, los lugares en que vive, su ciudad, su lengua materna, ciertas costumbres, etc., pero permanece a la vez en una ignorancia y una insensibilidad sorprendentes ante su patria como realidad colectiva aunque quizá no ante el hecho cualitativo de llamarse —él o sus prójimos— suizos, franceses, etc. Por otra parte, la cosa resulta muy natural, ya que si la lógica de los 7 a 11 años se limita a operar sobre objetos concretos o manipulables, ninguna operación disponible en este nivel permitirá la elaboración de un ideal que vaya más allá de lo sensible. Esto no es sino un ejemplo entre muchos otros: las nociones de humanidad, justicia social (en oposición con la justicia interindividual profundamente vivida desde el nivel concreto) libertad de conciencia, coraje cívico o intelectual, etc., son ideales que afectarán profundamente, junto a la idea de patria, a la afectividad del adolescente, pero que la mentalidad del niño no podrá ni comprender ni sentir sino a través de reflejos individuales.

En otros términos, de los sentimientos sociales el niño sólo conoce los

[6] J. Piaget y A. M. Weil, "Le développement chez l'enfant de l'idée de patrie et des relations avec l'étranger", *Bull. intern. des Sc. Sociales* (UNESCO), tomo III, 1951, págs. 605-621.

afectos interindividuales, incluso los sentimientos morales sólo se experimentan en función del respeto unilateral (autoridad) o del respeto mutuo. A estos sentimientos que por supuesto subsisten tanto en el adolescente como en el adulto, se les suman, a partir de los 13-15 años, sentimientos referidos a los ideales o a las ideas como tales. Por cierto que un ideal siempre se halla más o menos encarnado en una persona y sigue siendo un elemento interindividual importante dentro de esta clase de nuevos sentimientos: pero la cuestión consiste en saber si la idea es objeto de afectividad por causa de la persona o la persona por causa de la idea. Ahora bien, mientras que el niño jamás saldrá de este círculo porque sus únicos ideales sensibles son los ideales encarnados, durante la adolescencia se produce una superación en el sentido de la independencia de los ideales y se percibe sin necesidad de comentarios el parentesco existente entre este mecanismo afectivo y el pensamiento formal.

En cuanto a la personalidad, no hay noción peor definida en el vocabulario psicológico ya tan difícil de armar; esto se explica porque la personalidad se orienta en sentido inverso al yo: si el yo es por naturaleza egocéntrico, la personalidad es el yo descentrado. El yo es objeto de desagrado, tanto más en la medida en que es poderoso, mientras que una fuerte personalidad es aquella que logra disciplinar a su yo. Dicho de otro modo, la personalidad es la sumisión del yo a un ideal que encarna pero que lo supera y se le subordina: es la adhesión a una escala de valores, no abstracta sino referida a un hacer;[7] por lo tanto, en definitiva es la adopción de un rol social, no del todo preparado como lo es una función administrativa, sino de un rol que el individuo irá creando en su desempeño.

Decir que la adolescencia es la edad de la inserción en el cuerpo social adulto, equivale pues a sostener que es la edad de la formación de la personalidad, puesto que esta inserción bajo otro aspecto, necesariamente complementario, no es sino la construcción de una personalidad. Así, el programa de vida y el plan de reformas que acabamos de examinar, desde el ángulo de las funciones cognitivas o de pensamiento, y que constituía uno de los caracteres esenciales de la conducta del adolescente son al mismo tiempo el móvil afectivo de la formación de la personalidad. Un plan de vida es, ante todo, una escala de valores, que colocará ciertos ideales por encima de otros y subordinará los valores-medios a los fines considerados permanentes: ahora bien, esta escala de valores es la organización afectiva que corresponde a la organización intelectual de la obra que el recién llegado al cuerpo social se propone emprender. Por otra parte, un plano de vida es una afirmación de autonomía, y la autonomía moral finalmente conquistada plenamente por el adolescente que se juzga igual a los adultos constituye otro aspecto afectivo esencial de la personalidad naciente que se dispone a enfrentar la vida.

[7] Para la relación entre personalidad y obra, véase I. Meyerson, *Les fonctions psychologiques et les oeuvres* (Vrin).

En suma, las adquisiciones afectivas fundamentales de la adolescencia son paralelas a sus adquisiciones intelectuales. Para poder comprender el papel de las estructuras formales del pensamiento en la vida misma del adolescente, tuvimos finalmente que insertarlas en la personalidad entera. Pero, a su vez, no se comprendería del todo la formación de esta personalidad sin englobar en su interior también las transformaciones del pensamiento y, en consecuencia, la construcción de las estructuras formales.